

# Kapitel 4

## Bewegungsoptimierung aus theoretischer Sicht

### 4.1 Einleitung, Fragestellungen und Zielsetzungen

An einer Bewegung, die durch Muskelkräfte angetrieben wird, nehmen im Allgemeinen mehrere Muskeln teil. Die spannende Frage ist: Wie werden diese Kraftgeneratoren eingesetzt, um die gewünschte Bewegung zu erzielen? Inwiefern kann die Person selber den Einsatz verschiedener Muskeln steuern? Ist bei natürlichen Bewegungen wie z.B. dem Gehen die Bewegung so, dass die geleistete mechanische Arbeit minimal ist? Oder ist die Bewegung so, dass die umgesetzte Energie - d.h. Arbeit + Wärme - minimal ist? Oder wird die Bewegung so geregelt, dass die Bewegungsgenauigkeit maximal ist? Welche Eigenschaften erfüllen z.B. der Energieverbrauch oder der Wirkungsgrad, falls eine Bewegung so gestaltet ist, dass der Impuls maximal ist? Oder gibt es keine einfachen Gesetzmässigkeiten, die eine Bewegung regeln?

Wir wissen, nach welchen Prinzipien ein Muskel aufgebaut ist, und wir kennen einfache Beschreibungen, die angeben, wie gross die Muskelkraft ist in Abhängigkeit vom Zustand des Muskels, d.h. in Abhängigkeit von der Muskelaktivität, der Muskellänge, der Verkürzungs- bzw. der Dehnungsgeschwindigkeit, der Laktatkonzentration etc.. Solche Modelle wurden in früheren Vorlesungen vorgestellt; diese Muskelmodelle wurden als Muskeln vom verallgemeinerten Hill'schen Typus bezeichnet. Die Regelgrösse eines auf diese Art vereinfachten Muskels ist der Aktivitätszustand  $Z$ , welcher eine gewisse Ähnlichkeit zu verarbeiteten EMG-Signalen aufweist.

Der Aktivitätszustand  $Z(t)$  kann aufgeteilt werden in eine Willküraktivität  $Z_W(t)$  und in eine Reflexaktivität  $Z_R(t)$ . Weitere Ausführungen zu  $Z(t)$  bzw. zu stationären oder nichtstationären Zustände findet man weiter unten im Abschnitt *Simulationen*. Mathematisch geschrieben erhält man für die totale Aktivität:

$$Z(t) = Z_W(t) + Z_R(t) \quad (4.1)$$

Reflex- und Willküraktivität werden durch verschiedene komplexe Regelkreise bestimmt. Diese Regelkreise beinhalten die uns aus der Physiologie und Neurologie bekannten Sensoren wie z.B. Muskelspindeln, Golgiorgane oder Gelenkrezeptoren.

Im Zusammenhang mit der Belastungsanalyse wurden unterschiedliche Optimierungsverfahren und verschiedene Funktionale diskutiert, da das muskuläre Drehmoment zwar eindeutig berechnet aber nicht eindeutig auf die Beiträge der einzelnen Muskeln zerlegt werden kann. Verschiedene Ansätze wurden angewendet, um Muskelkräfte „mathematisch“ zu bestimmen. Ob diese berechneten Kräfte mit den realen Muskelkräften übereinstimmen, ist im Allgemeinen nicht immer klar. Mit Hilfe von EMG-Messungen versucht man die Güte der Approximation aufzuzeigen.

Reale muskuläre Bewegungen sind (vielleicht) das Resultat von Optimierungsprozessen; vielleicht sind sie auch nur das Resultat der mechanischen Eigenschaften der Muskulatur und der gegebenen neurologischen Schlaufen. Welche Anteile von spezifischen Eigenschaften der Muskulatur herrühren, und welche Phasen von Bewegungsabläufen im motorischen Cortex gespeichert sind und Komponenten der Regelung darstellen, sind und bleiben faszinierende - bis heute im Detail jedoch unbeantwortete - Fragen.

## 4.2 Zusammenfassung: Eigenschaften des kontraktiven Elementes

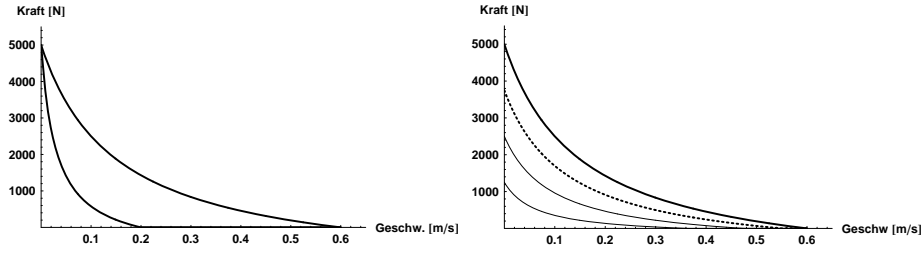
Das kontraktile Element ist der eigentliche Kraftgenerator. Die zwei charakteristischen Grund-Beziehungen sind (siehe Kapitel 2):

- *Die Relation zwischen erzeugter Kraft und dazugehöriger Geschwindigkeit (genauer: Verkürzungsgeschwindigkeit) des kontraktiven Elementes.*
- *Die Relation zwischen abgegebener Wärme pro Zeiteinheit und dazugehöriger Geschwindigkeit des kontraktiven Elementes.*

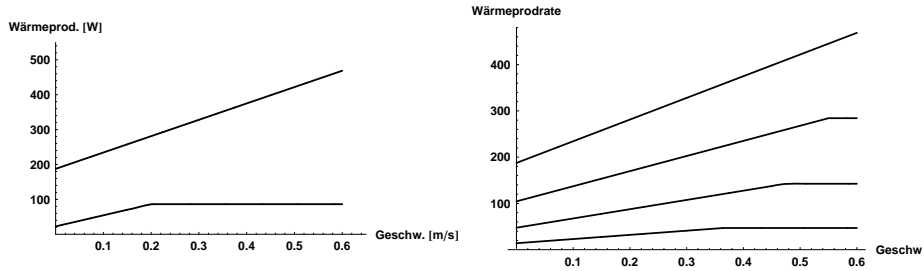
Diese Grund-Beziehungen sind sowohl für reine Typen (ein Typ I Muskel bzw. ein Typ II Muskel bei maximaler Aktivität, beide mit einer Länge von 10 cm und einem Querschnitt von  $200 \text{ cm}^2$ , d.h. ca. 2 kg Masse) als auch für einen verallgemeinerten Typ gleicher Dimension in den folgenden Bildern dargestellt (Abb. 4.1, Abb. 4.2).

Aus diesen zwei phänomenologischen Beziehungen lassen sich alle anderen charakteristischen Eigenschaften wie die Leistungs - Geschwindigkeits - Relation, die Energieverbrauchsrate - Geschwindigkeits - Beziehung oder die Relation zwischen dem Wirkungsgrad und der Verkürzungsgeschwindigkeit ableiten. Diese drei Relationen sind für die zwei oben beschriebenen Beispiele von Muskeln in den Abbildungen 4.3, 4.4 und 4.5 dargestellt.

Das Kriterium *Leistung* Betrachtet man nur das kontraktile Element bei stationären Bewegungen, so kann z.B. die optimale Bewegung, die die Leistung



**Abbildung 4.1:** Kraft-Geschwindigkeits-Relationen. Links: reiner Typ I und reiner Typ II, Querschnitt =  $200 \text{ cm}^2$ , Länge =  $10 \text{ cm}$  bei maximaler Aktivität ( $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_{TypI} = 0.15 P_0$ ,  $a_{TypII} = 0.25 P_0$ ,  $b_{TypI} = 0.03 \text{ m/s}$ , und  $b_{TypII} = 0.15 \text{ m/s}$ ). Rechts: verallgemeinerter Typ:  $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_0 = 1500 \text{ N}$ ,  $a_1 = 800 \text{ N}$ ,  $b_0 = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $b_1 = 1.2 \text{ m/s}$ ,  $b_2 = -0.2 \text{ m/s}$ .



**Abbildung 4.2:** Wärmeproduktionsrate-Geschwindigkeits-Relationen. Links: reiner Typ I und reiner Typ II, Querschnitt =  $200 \text{ cm}^2$ , Länge =  $10 \text{ cm}$  bei maximaler Aktivität ( $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_{TypI} = 0.15 P_0$ ,  $a_{TypII} = 0.25 P_0$ ,  $b_{TypI} = 0.03 \text{ m/s}$ , und  $b_{TypII} = 0.15 \text{ m/s}$ ). Rechts: verallgemeinerter Typ,  $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_0 = 1500 \text{ N}$ ,  $a_1 = 800 \text{ N}$ ,  $b_0 = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $b_1 = 1.2 \text{ m/s}$ ,  $b_2 = -0.2 \text{ m/s}$ . Beachte: Der Knick in den Graphen tritt nur auf, falls der Muskel durch eine äussere Kraft schneller verkürzt wird als seine maximale Verkürzungsgeschwindigkeit beträgt.

maximal macht einfach aus Abbildung 4.3 abgelesen werden. Das Resultat ist die optimale Verkürzungsgeschwindigkeit.

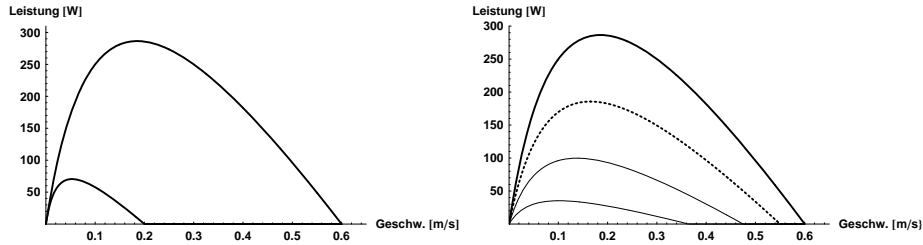
Analytisch lautet die Beziehung für reine Typen im konzentrischen Bereich, die auch als Hill-Gleichung bezeichnet wird (ohne eine Kraft-Länge-Abhängigkeit zu berücksichtigen):

$$F_{CE}(Z, v) = Z \left( P_0 - (P_0 + a) \frac{v}{v + b} \right) \geq 0 \quad (4.2)$$

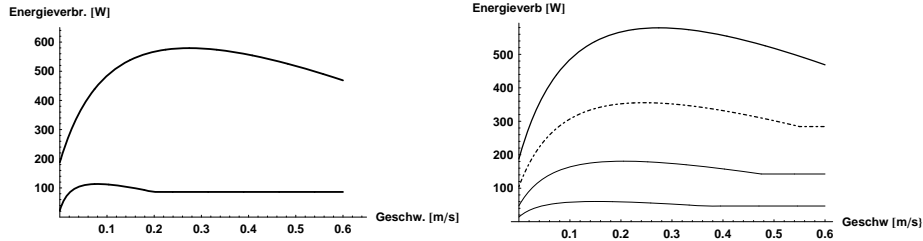
Mit  $Z$  = Aktivität und  $P_0$ ,  $a$  und  $b$  Hill'sche Parameter

und für den verallgemeinerten Typ, ebenfalls im konzentrischen Bereich, nach Phillips und Petrofsky:

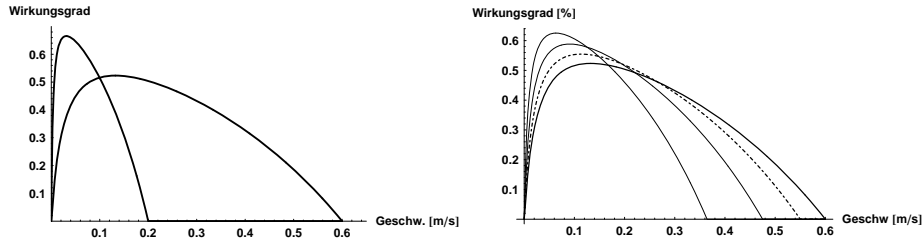
$$F_{CE}(Z, v) = \left( P(Z) - (P(Z) + a(Z)) \frac{v}{v + b(Z)} \right) \geq 0 \quad (4.3)$$



**Abbildung 4.3:** Leistungs-Geschwindigkeits-Relationen. Links: reiner Typ I und reiner Typ II, Querschnitt =  $100 \text{ cm}^2$ , Länge = 10 cm bei maximaler Aktivität ( $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_{TypI} = 0.15 P_0$ ,  $a_{TypII} = 0.25 P_0$ ,  $b_{TypI} = 0.03 \text{ m/s}$ , und  $b_{TypII} = 0.15 \text{ m/s}$ ). Rechts: verallgemeinerter Typ,  $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_0 = 1500 \text{ N}$ ,  $a_1 = 800 \text{ N}$ ,  $b_0 = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $b_1 = 1.2 \text{ m/s}$ ,  $b_2 = -0.2 \text{ m/s}$ .



**Abbildung 4.4:** Energieverbrauchsrate-Geschwindigkeits-Relationen. Links: reiner Typ I und reiner Typ II, Querschnitt =  $100 \text{ cm}^2$ , Länge = 10 cm bei maximaler Aktivität ( $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_{TypI} = 0.15 P_0$ ,  $a_{TypII} = 0.25 P_0$ ,  $b_{TypI} = 0.03 \text{ m/s}$ , und  $b_{TypII} = 0.15 \text{ m/s}$ ). Rechts: verallgemeinerter Typ,  $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_0 = 1500 \text{ N}$ ,  $a_1 = 800 \text{ N}$ ,  $b_0 = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $b_1 = 1.2 \text{ m/s}$ ,  $b_2 = -0.2 \text{ m/s}$ . Beachte: Der Knick in den Graphen tritt nur auf, falls der Muskel durch eine äussere Kraft schneller verkürzt wird als seine maximale Verkürzungsgeschwindigkeit beträgt.



**Abbildung 4.5:** Wirkungsgrad-Geschwindigkeits-Relationen. Links: reiner Typ I und reiner Typ II, Querschnitt =  $100 \text{ cm}^2$ , Länge = 10 cm bei maximaler Aktivität ( $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_{TypI} = 0.15 P_0$ ,  $a_{TypII} = 0.25 P_0$ ,  $b_{TypI} = 0.03 \text{ m/s}$ , und  $b_{TypII} = 0.15 \text{ m/s}$ ). Rechts: verallgemeinerter Typ,  $P_0 = 5000 \text{ N}$ ,  $a_0 = 1500 \text{ N}$ ,  $a_1 = 800 \text{ N}$ ,  $b_0 = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $b_1 = 1.2 \text{ m/s}$ ,  $b_2 = -0.2 \text{ m/s}$ .

$$P(Z) = Z \cdot P_0, \quad a(Z) = a_0 + a_1 \cdot Z, \quad b(Z) = b_0 + b_1 \cdot Z + b_2 \cdot Z^2 \quad (4.4)$$

## 4.3 What is Optimized in Muscular Movements?

### 4.3.1 Einleitung

R. B. Stein hat sich intensiv mit dieser Fragestellung auseinandergesetzt und hat seine Ideen und Vorstellungen in einem Artikel „What is Optimized in Muscular Movements?“, veröffentlicht. Die Arbeit ist inhaltlich sehr wertvoll, didaktisch gut aufgebaut, enthält aber einige eher schwierige mathematische Formulierungen. Aus diesen Gründen habe ich den Artikel für diese Vorlesung etwas aufgearbeitet. Die Originalarbeit ist im Anhang aufgeführt.

### 4.3.2 Zusammenfassung der Arbeit von R. B. Stein

Begründung seiner Arbeit: **By considering the predictions of various simple optimization strategies and comparing these predictions with human movements, some insight may be gained about the question raised in the title „What is Optimized in Muscular Movements?“.**

#### Abschnitt 1:

*Gesucht:* Die Bewegung, die die kleinste mechanische Energie benötigt, um eine Masse zu bewegen, die an ein visko-elastisches Band gebunden ist.  $I$  ist gegeben durch:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(t)v(t) dt \quad (4.5)$$

*Lösung:* Minimierung der Energie liefert als Lösung eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Bemerkung: Minimierung der mechanischen Energie ist gleichbedeutend mit der Minimierung des Ausdrucks

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) dt \quad (4.6)$$

Weitere Funktionale werden untersucht, so z.B.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} a^2(t) dt \quad (4.7)$$

oder

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \dot{a}^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} jerk^2(t) dt \quad (4.8)$$

## Abschnitt 2:

*Gesucht:* Die Bewegung, wie in Abschnitt 1, wobei die Kräfte nicht beliebig gross sein bzw. nicht sprunghaft ansteigen dürfen. Begründung: Die Muskelkraft kann weder unendlich gross werden noch sprunghaft ansteigen. *Lösung:* Diese Bedingungen führen zu einer Bewegung mit minimalem „jerk“ (jerk = Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit).

## Abschnitt 3:

Im letzten Abschnitt wird der „beliebige“ Kraftgenerator durch eine Muskelfunktion ersetzt. Die Differentialgleichungssysteme werden dadurch komplexer. Das Resultat fasst Stein wie folgt zusammen:

*„Minimizing energy consumption by a muscle will depend on muscle properties. Constraints of the maximum force or time lags in force production tend to blur the differences between alternative strategies. Many natural movements are consistent with minimizing of jerk. This form could arise from limitations of force output and time lags associated with muscular force production than from any computation carried out in the brain. ... **Minimum jerk movements will also minimize energy consumption by the muscle over a range of conditions.**“*

*Bemerkung: Auf den folgenden Seiten, 137 - 148, ist der Artikel von Stein eingefügt!*

Bibliothek ETH Biomechanik

---

# HUJMANN

---

# MUSCLE

---

# POWER

Edited by

Norman L. Jones, MD, Neil McCartney, PhD,  
and Alan J. McComas, MB

McMaster University  
Hamilton, Ontario

Human Kinetics Publishers, Inc.  
Champaign, Illinois



Dr. Burke emphasized a point made earlier by Dr. Bigland-Ritchie that the order of recruitment of motor units might be altered in muscles having a number of functions if the direction of action of the muscle was changed; thus, different motor unit pools might be recruited, even though they remained within a functional grouping and within the same muscle. Dr. Grimby said that the muscle studied most often by his group, the extensor digitorum brevis, had two portions, one acting on the big toe and the other on the small toes. However, the recruitment studies had been made on low and high threshold units acting on the big toe.

In summarizing Dr. Grimby's paper and the discussion, Dr. McComas pointed out that the results complemented those recently obtained in animals and reported by Dr. Burke earlier in the meeting and that demonstrated an important function role for those motor units with very high thresholds during isometric voluntary contractions.

## References

- Corley, K., Kowalchuk, N., & McComas, A.J. (1984). The contrasting effects of suspension on hindlimb muscles in the hamster. *Experimental Neurology*, 85, 30-40.
- Deemedt, J.E., & Godaux, E. (1977). Fast motor units are not preferentially activated in rapid voluntary contractions in man. *Nature* (London), 267, 717-719.
- Gollnick, P.D., Piehl, K., & Saltin, B. (1974). Selective glycogen depletion in human muscle fibers after exercise of varying intensity and at varying pedalling rates. *Journal of Physiology* (London), 241, 45-57.
- Sale, D.G., McComas, A.J., MacDougall, J.D., & Upton, A.R.M. (1982). Neuromuscular adaptation in human thenar muscles following strength training and immobilization. *Journal of Applied Physiology: Respiratory, Environmental and Exercise Physiology*, 53, 419-424.

# 9

## What is Optimized in Muscular Movements?

R.B. Stein, M.N. Öguztöreli, and C. Capaday  
University of Alberta

A symposium on muscle power and performance, most of the papers will report the latest details of muscle mechanics and neural control mechanisms. However, at least initially, this paper will approach the problem from quite a different perspective. In making movements, humans share common physical constraints with other animals and with artificial systems, including robots. The pattern of movement produced against these constraints will depend on the strategies used by man and machines (Nelsson, 1983).

The choice of a strategy depends on the goals of the movement; that is, what variable or variables are being optimized. In a robot this optimization may be explicitly programmed or it may follow implicitly from the properties of the motors used and their limitations (Brady, Hollerbach, Johnson, Lozano-Perez, & Mason, 1982). Similarly, human movements may be consciously optimized or they may be determined at a mechanical level by muscle properties or neural circuitry. By considering the predictions of various simple optimization strategies and comparing these predictions with human movements, some insight may be gained about the question raised in the title of this paper.

## Optimization of Kinematic Variables

Muscles and motors work against physical loads, which may consist, as shown in Figure 1, of a mass  $M$ , a dashpot with viscosity  $D$ , and a spring of



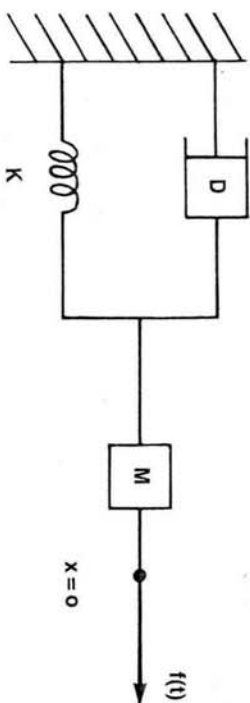


Figure 1. A load consisting of a mass  $M$ , a dashpot of viscosity  $D$ , and a spring of stiffness  $K$  is moved by a force  $f(t)$  from an initial position  $x = 0$  at time  $t = 0$ .

stiffness  $K$ . In order to move the load from a point  $x = 0$  to  $x = X$  in a time  $T$ , some force must be imparted to the load. The force  $f(t)$  as a function of time will obviously depend on the way in which the movement is carried out. The power being imparted to the load at any time  $t$  will simply be the product of the force and the velocity  $dx/dt$ . The total energy required in moving the load from  $x = 0$  at  $t = 0$  to  $x = X$  at  $t = T$  will be given from basic Newtonian mechanics by the integral

$$\int_0^T f(t) x' dt = \int_0^T [Mx'' + Dx' + Kx]x' dt \quad (1)$$

in which  $x' = dx/dt$  and  $x'' = d^2x/dt^2$ . However,

$$\int_0^T Mx''x' dt = 1/2 M[x']^2 \Big|_0^T = 0 \quad (2)$$

if the mass is initially at rest ( $x' = 0$ ) and is brought to rest again at time  $T$ . Also,

$$\int_0^T Kxx' dt = 1/2 K[x^2] \Big|_0^T = KX^2/2 \quad (3)$$

independently of the pathway taken from  $x = 0$  to  $x = X$ . Finally, since  $D$  is a constant, minimization of energy dissipation by the load requires minimization of the integral

$$I_1 = \int_0^T [x']^2 dt. \quad (4)$$

Note that minimization of energy dissipation by the load does *not* imply minimizing the energy consumption of the muscle (or motor) producing the force to move the load. This is a separate problem that will be further considered below. From the calculus of variation (Akhieser, 1962), the integral  $I_1$  will be minimized if

$$\partial Y / \partial x - d(\partial Y / \partial x') / dt = 0 \quad (5)$$

in which  $Y = (x')^2$  in our example. The Euler-Lagrange equation (5) implies that  $d(2x')/dt = 0$ , and hence that

$$x' = c_1; x = c_1 t + c_0 \quad (6)$$

subject to the boundary conditions. If  $x = 0$  at  $t = 0$ ,  $c_0 = 0$ , and if  $x = X$  at  $t = T$ ,  $c_1 = X/T$ . Thus, to minimize energy dissipation, the load should be moved at constant velocity between the two points, as shown in Figure 2A. Note that this requires that the mass be accelerated instantaneously at  $t = 0$

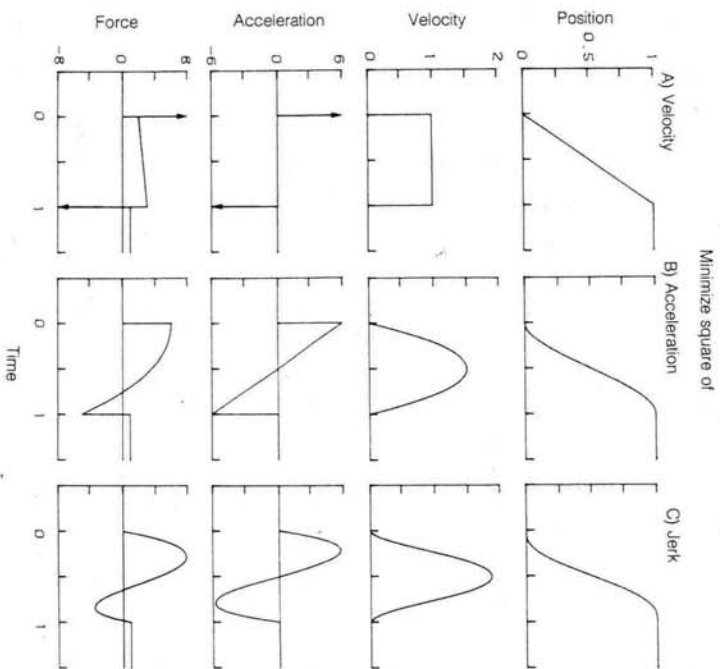


Figure 2. To minimize the mean square velocity in moving from a position  $x = 0$  to  $x = 1$  in time  $t = 1$ , the movement should take place linearly with a square velocity profile and pulses of acceleration and deceleration. For a load such as shown in Figure 1 with  $M = K = 1$ ,  $D = 2$ , the force required is shown at the bottom. (B) To minimize mean square acceleration, the form of the movement becomes sigmoid with corresponding changes in the other parameters. (C) To minimize mean square jerk (jerk is the derivative of acceleration), parameters of the movement and the force required become smoother. Further discussion in text.

and decelerated instantaneously at  $t = T$  if it is to remain at  $x = X$  for  $t \geq T$ . We have set  $X = T = 1$  in Figure 2A, but the movement could obviously be scaled to any value of  $X$  or  $T$  required. The force required to obtain the optimal trajectory is

$$f(t) = Mx'' + Dx' + Kx = [M[\delta(t) - \delta(t-T)] + D + Kt](X/T) \quad (7)$$

in which  $\delta(t)$  is the Dirac delta function or unit impulse. A real force generator would not be able to produce the infinite force for instantaneous acceleration. The effect of constraints on movements will be considered later. The form of the force (without limiting its maximum value) is also shown in Figure 2A, assuming  $M = K = 1$ ,  $D = 2$ . Calculation of the optimal trajectory did not depend on the nature of the load, so the required force for any load can be easily calculated with an equation analogous to Equation 7.

Optimization of the mean square velocity for Equation 4 is only one of a number of kinematic variables that might be considered. For example, in robotics optimization of mean square acceleration is often considered (Chaudet & O'Shea, 1983). Note that one cannot "optimize" acceleration itself because  $\int_0^T x'''' dt = x' \Big|_0^T = 0$ , if the movement begins and ends at rest. Again, using the calculus of variations, it can be shown that the trajectory that will optimize the integral

$$I_2 = \int_0^T [x'']^2 dt \quad (8)$$

is of the form

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \quad (9)$$

in which the  $c_i$ 's are constants, which have to be determined from the boundary conditions. If we assume that  $x'(0) = 0$  at times 0 and  $T$  (i.e., the load starts and ends at rest), then

$$c_0 = c_1 = 0; c_2 = 3X/T^2; c_3 = -2X/T^3 \quad (10)$$

so

$$x = c_2 t^2 + c_3 t^3; x' = 2c_2 t + 3c_3 t^2; x'' = 2c_2 + 6c_3 t \quad (11)$$

The form of the movement that optimizes the integral  $I_2$  and the force required to produce this movement for the load of Figure 1 are shown in Figure 2B, again assuming  $X = T = M = K = 1$ ,  $D = 2$ . The position follows a sigmoid curve. The velocity follows a parabolic curve, which is symmetric about the time  $T/2$ . The acceleration decreases linearly, passing through 0 at  $T/2$ . The force is more complex in form, being the sum of the three curves above, but is bounded (as is the acceleration) for all values of  $T$ .

If the mean square values of still higher order derivatives are minimized, increasingly smooth curves of position, velocity and acceleration are obtained. For example, Flash and Hogan (1982) suggested that the integral

$$I_3 = \int_0^T [x''']^2 dt \quad (12)$$

might be minimized in arm movements, in which  $x''''$  is the third derivative of position and is referred to as jerk. In this case, position is a fifth order polynomial

$$x = \sum_{i=0}^5 c_i t^i \quad (13)$$

in which the constants are again calculable from the boundary conditions (Nelson, 1983). If it is also assumed that  $x''(0) = x''(T) = 0$ , then

$$c_0 = c_1 = c_2 = 0; c_3 = 10X/T^3; c_4 = -15X/T^4; c_5 = 6X/T^5 \quad (14)$$

The form of the motion is shown in Figure 2C. Position again increases in a sigmoid fashion. The velocity profile is smoother and still shows a symmetry about time  $T/2$ , as in Figures 2A and 2B. The acceleration now increases and decreases smoothly according to a cubic equation and shows a negative symmetry about the time  $T/2$ . These results can be generalized to higher order derivatives. The integral  $I_n$  that minimizes the square of the  $n$ -th order derivative subject to the boundary conditions  $x^{(k)}(0) = 0$ ,  $(k = 0, 1, \dots, n-1)$  and  $x^{(k)}(T) = X$ ,  $x^{(k)}(T) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) will have a polynomial solution of order  $2n-1$ . The velocity will show an even symmetry with a polynomial of order  $2n-2$ , and the acceleration an odd symmetry with a polynomial of order  $2n-3$ .

## Minimization of Energy Consumption

In Figure 2 the force required to move the load also becomes increasingly smooth as higher order derivatives are optimized. The force produced by a motor is proportional to the current  $I$  in the motor windings. To produce more current a larger voltage must be applied, and the power consumption is the product  $IV = I^2/R$ , in which  $R$  is the resistance of windings; that is, power varies as current or force squared. Thus, another possible strategy is to minimize the energy consumed by the motor (rather than that dissipated by the load), which is proportional to the integral  $J$  in which

$$J = \int_0^T [f(t)^2] dt \quad (15)$$

Again, using the calculus of variations, it follows that minimization of energy consumption requires that

$$Mf''(t) - Df'(t) + Kf(t) = 0. \quad (16)$$

This equation can be solved by the use of Laplace transforms (Sokolnikoff & Redheffer, 1958), which give

$$[Ms^2 - Ds + K]f^*(s) = M[sf(0) + f'(0)] - Df(0), \quad (17)$$

in which  $f^*(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ , and  $f^*(s)$  denotes the Laplace transform of  $f(t)$ , which is a function of the Laplace variable  $s$ . From the relation between force and the parameters of movement, an equation for the Laplace transform of  $x(t)$  can be obtained, namely:

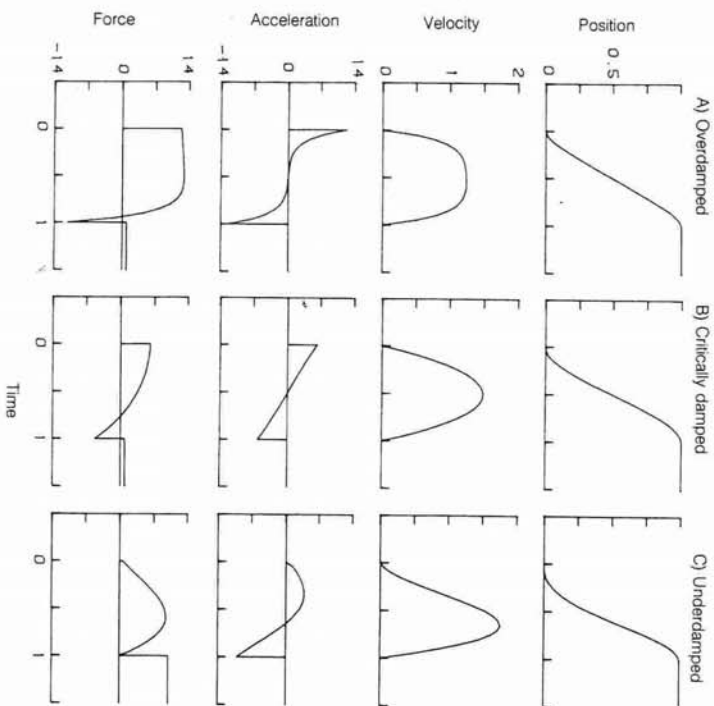
$$x^*(s) = \frac{M[sf(0) + f'(0)] - Df(0)}{[Ms^2 + Ds + K][Ms^2 - Ds + K]}. \quad (18)$$

The form of the movement will depend on the load and will be different if the system is underdamped, overdamped, or critically damped.\* If  $M = K = 1$ ,  $D = 2$ , the system is critically damped (see Figure 3B) and the form of the movement is similar to that obtained for minimizing acceleration (see Figure 2B). For a pure inertial load  $M$ , the position and its derivatives will also be identical to that given by Equations 9 and 10 for minimizing acceleration. If  $D = K = 0$ , the force will not be the same as that shown in Figure 3 because the load is different. The similarity of Figures 2B and 3B implies that, with numerically comparable values of the parameters, the inertial term dominates the force requirements to move the load a unit distance in a unit time.

If the damping is increased by increasing  $D$ , the position changes more linearly, the velocity becomes more square and the change in acceleration sharper (see Figure 3A, in which  $D = 10$ ,  $M = K = 1$ ). The form of the movement approaches that found for minimizing the velocity (see Figure 2A). Indeed, for a pure viscous load  $D$  the motion will be identical to that shown in Figure 2A. The forces required to produce these movements will, of course, depend on the load.

Finally, the load can be made underdamped by various means. If  $D$  is decreased, it has little effect because the inertial term already is the dominant one, as mentioned above. However, in Figure 3C the stiffness  $K$  has been increased to 10 ( $M = 1$ ,  $D = 2$ ) and the movement becomes asymmetrical (i.e., the load does not reach the halfway point in distance until  $t > 0.5$ ). This asymmetry becomes increasingly large if  $K$  is increased relative to  $M$  and  $D$ . The reason is that with a pure spring load, force is only required to maintain

\*Solutions of Equation 18 for different values of damping have not been derived here in the interest of space, but are shown in Figure 3.



**Figure 3.** Increasing the viscosity  $D$  from the critically damped value of 2 (B) to 10 (A), while keeping  $M = K = 1$ , produces an overdamped load. Increasing  $K$  to 10 (C), while keeping  $M = 1$  and  $D = 2$ , produces an underdamped load. The form of the movement required to minimize the mean square force, which corresponds to minimizing energy consumption for an electrical motor, varies with the degree of damping. Further discussion in text.

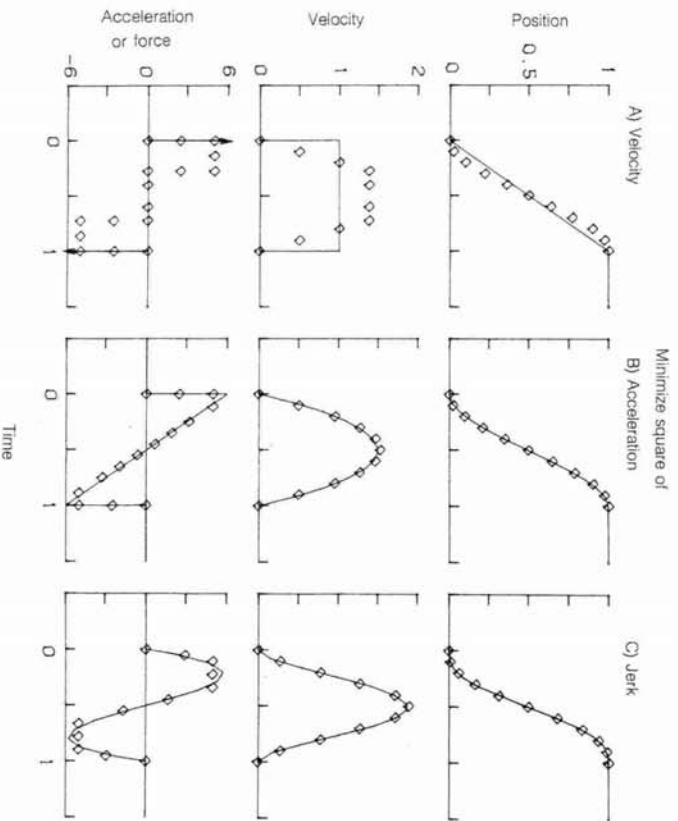
a nonzero position. Thus, the way to minimize force or its square under these conditions is to move the load to the position  $X$  at the last possible moment before  $t = T$ .

## Constrained Movements

Up to this point we have considered the optimal movement without regard to the constraints that will be imposed by any physical or biological force-generating system. For example, in Figure 2A an infinite force would be required to accelerate or decelerate the mass instantaneously. Similarly, the forces required for other optimal conditions may exceed the force-generating capability of a muscle or electrical motor. Constraints of this sort can be dealt with

mathematically using Pontryagin's Principle (Pontryagin, Botyanski, Camkendez, & Mischenko, 1962; Pan, 1966) and form the basis of this section.\* Control of the movement in Figure 2A has a 'bang-coast-bang' form; that is, the maximum force should be used initially to accelerate the load, which can then coast at constant velocity until it is decelerated by the maximum force (Hollerbach, 1980). Figure 4A compares the form of the optimal movement with infinite (solid lines) and finite (diamonds) forces available. For ease of calculation a pure inertial load has been used with  $M = 1$ , so the values of force and acceleration will be numerically equal.

The acceleration and deceleration phases will then be identical in form with symmetry about the midpoint ( $t = T/2$ ). With an elastic load some of the limited



**Figure 4.** The effect of a limited force range ( $-5 < F < 5$ ) on the form of movements produced so as to minimize the square of (A) velocity, (B) acceleration, or (C) jerk. The solid lines are the values without constraints on force (see also Figure 2), whereas the diamonds show the corresponding values with force limitation. Pure inertial load ( $M = 1$ ;  $D = K = 0$ ).

\*An Appendix explaining the application of Pontryagin's principle to these problems is available on request.

force available would be required to stretch the spring and the symmetry would be lost. The problem is to determine the times  $t_1$  and  $t_2$  when switching from one mode to the other should occur. (This is a simple example of a two-point boundary value problem, which occurs frequently in optimal control with constraints.) From the physical symmetry we know that  $t_2 = T - t_1$ . Clearly, if there is a maximum force  $F$  available

$$x'' = F/M, \quad x' = Ft/M, \quad x = Ft^2/(2M) \quad (19)$$

in the region  $0 < t < t_1$ . For  $t_1 < t < T - t_1$  the inertial load will move at a constant velocity  $Ft_1/M$ . To satisfy the boundary conditions this velocity must be such that it covers the distance required,  $X - (Ft_1^2/M)$ , in the time available,  $T - 2t_1$ . Thus,

$$Ft_1 = \frac{MX - Ft_1^2}{T - 2t_1}$$

which requires that

$$t_1 = [T \pm \sqrt{T^2 - 4XM/F}] / 2 \quad (21)$$

Equation 21 will have a real solution only if  $F \geq 4XM/T^2$ . (The force must be above a minimum value to move the mass  $M$  the distance  $X$  in time  $T$ .)

Similar considerations apply to optimal control of acceleration and jerk in Figures 4B and 4C. For minimizing acceleration the movement starts identically to Figure 4A up to a time  $t_1$ . Then, for  $t_1 < t < T - t_1$ ,

$$x'' = c_1 t + c_2; \quad x' = c_1 t^2/2 + c_2 t + c_3' \quad (22)$$

$$x = c_1 t^3/6 + c_2 t^2/2 + c_3 t + c_4$$

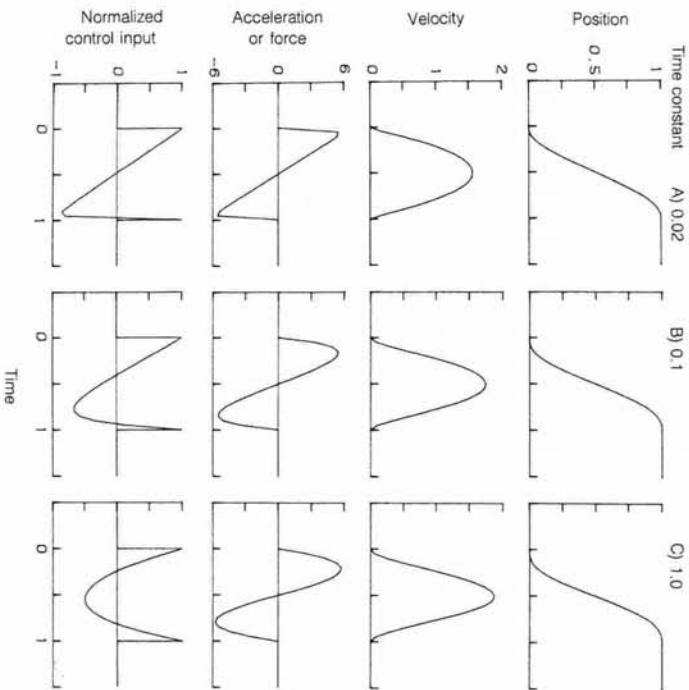
$$\text{in which } c_1 = \frac{-2F}{M(T-2t_1)}, \quad c_2 = \frac{FT}{M(T-2t_1)}, \quad c_3 = Ft_1/M - c_1 t_1^2/2 - c_2 t_1$$

$$c_4 = Ft_1^2/(2M) - c_1 t_1^3/6 - c_2 t_1^2/2 - c_3 t_1.$$

The constants are obtained from the boundary conditions when  $t = t_1$ . Because of the symmetry of the movement, the correct value of  $t_1$  will produce a movement that covers a distance  $X/2$  when  $t = T/2$ . Equation 22 could be solved explicitly for the value of  $t_1$ , which satisfies this requirement, but it is easier to use a method of successive approximations. Similar considerations apply to minimizing jerk, but the details have been omitted. Although the forms of the acceleration remain distinct in Figures 4A-C, the velocity and particu-

larly the position records become more similar as the force is limited. Thus, to distinguish experimentally which mode, if any, was being used, measurements should be done under conditions in which the maximum force output of the system is used briefly, if at all.

Limits apply in a real system not only to the maximum force but to its rate of change. Thus, rather than having the force (and hence the acceleration) in Figure 4 change instantaneously, there will be a maximum positive or negative slope, which will affect the acceleration records of Figures 4A and 4B in particular and make them even closer to those in Figure 4C. In fact, the limits on rates in both physical and biological systems are often due to exponential processes that affect the behavior of the system at all levels, not only near maximum values. When an electric motor is turned on, a back EMF is created, which prevents the current from building up immediately. Similarly, even when a muscle is stimulated tetanically, the force builds up to its final level gradually



**Figure 5.** Effect of exponential lags in force production on the form of movement produced. The time constants used were (A) 0.02, (B) 0.1, and (C) 1. As the time constant increases, the movement changes from the form typical of minimizing acceleration (see Figure 2A) to that typical of minimizing jerk (see Figure 2C). The control inputs needed to produce the required forces are also shown and have been normalized to their maximum values.

with an approximately exponential time course (see Figure 5). As the time constant is increased from  $\tau = 0.02$  to  $\tau = 1$ , the form of the acceleration is smoothed and shows a transition from the form obtained for minimizing acceleration (see Figure 2B) to that obtained for minimizing jerk (see Figure 2C). Mathematically, the form of the movement must agree with that for minimization of jerk if  $t \ll \tau$ , but good agreement was found even when  $t = \tau$  (compare Figures 2C and 5C). Also shown in Figure 5 are the control inputs required to generate the forces with an exponential lag. The control input changes from a mainly biphasic shape (see Figure 5A) to a triphasic shape (see Figure 5C). The shape in Figure 5A is similar to the force, except for a brief pulse at the end, which is required for the boundary conditions. The shape of the control input in Figure 5C approaches the derivative of force. No limits were put on the control inputs in Figure 5, but the effects of a limit would be similar to that illustrated in Figure 4.

## Optimization of Muscle Function

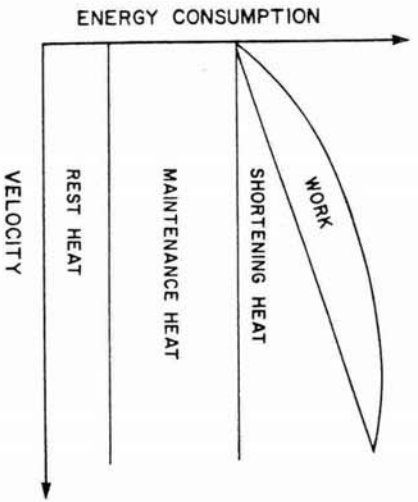
In previous sections, examples were chosen to be general enough so that the results might apply to electrical motors or muscles. Now we turn more specifically to muscle movements that will minimize energy consumption by the muscle. From the early work of Hill (1965), the rate of energy expended by a muscle and can be expressed as a sum

$$E = E_0 + E_1 g(t) + E_2 g(t)y' + f(t)x' \quad (23)$$

$E_0$  is the rate of heat expended at rest.  $E_1$  is the coefficient for the extra rate of energy expenditure needed to maintain force generation. Maintenance heat is assumed to be proportional to the activation  $g(t)$  of force generating elements (i.e., cross-bridges) within the muscle, in contrast to the situation discussed earlier of a second power relation for electric motors.  $E_2$  is the coefficient for the extra rate of heat production during shortening. Shortening heat is assumed to be proportional to the degree of activation and the velocity of shortening  $y'$  of the force generators (Oguztoreli & Stein, 1983). A term has also been included for the rate of doing work on the load, which is the product of the external force being generated and the velocity  $x'$  at which the load is moving.

These various components are illustrated in Figure 6. Shortening heat is not exactly proportional to the speed of shortening (Hill, 1964), and it is largely unknown whether maintenance heat is proportional to the degree of activation, particularly under time-varying conditions. Nonetheless, these relatively simple assumptions will be adequate for the present purpose. To minimize energy consumption, we must minimize the integral  $J$ , in which

$$J = \int_0^T E dt = \int_{i=0}^3 J_i \quad (24)$$



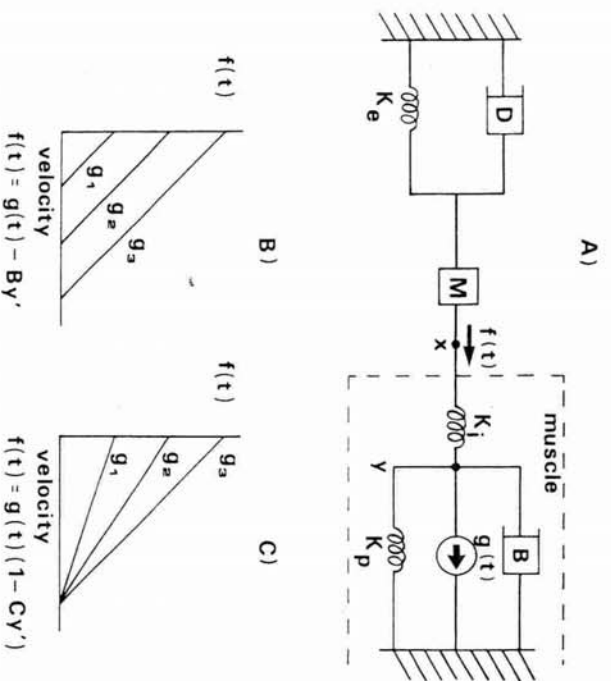
**Figure 6.** The rate of energy consumption increases with the velocity of shortening. The total can be divided into various components, as described in the text (see also Huxley, 1957; Oguztoreli & Stein, 1983).

From Equation 23,  $J_0 = \int_0^T E_0 dt = E_0 T$  (a constant),  $J_1 = \int_0^T E_v g(t) dt$ ,  $J_2 = \int_0^T E_s g(t) y' dt$ , and  $J_3 = \int_0^T f(t) x' dt$ . We showed earlier that minimization of energy dissipation (integral  $J_0$ ) in moving a load from one point to another required minimization of the velocity squared, a purely kinematic variable, during the period of the movement.

Determining the contribution of integrals  $J_1$  and  $J_2$  requires assumptions about force generation within the muscle. For this purpose we need a model that is sufficiently simple that analytical and computational results can be obtained for comparison with the previous sections. Figure 7A shows such a model coupled to the load from Figure 1. The model contains a force generator with time course  $g(t)$  that interacts with internal series and parallel elastic components having stiffness  $K_s$  and  $K_p$ , respectively. Also included is a dashpot of viscosity  $B$ , which provides the force-velocity properties of the model. All the elements are initially assumed to be linear, although this assumption will be relaxed later. Even in its linear form, the model has been widely used and agrees remarkably well with data from a number of muscles (Bawa, Mannard, & Stein, 1976; Cannon & Zahalak, 1982). The equations of motion for the model can be immediately written from the balance of forces at the two nodes  $x$  and  $y$ , namely

$$f(t) = Mx'' + Dx' + K_s x = K_i (y-x) \quad (25)$$

$$g(t) = By' + K_p y + K_v (y-x) \quad (26)$$



**Figure 7.** The load in Figure 1 has been connected to a simple muscle model (A) with internal series ( $K_s$ ) and parallel ( $K_p$ ) elastic elements, a force generator ( $g$ ), and a viscosity ( $B$ ) that determines its force-velocity properties. The external spring has been denoted  $K_e$  to distinguish it from the internal elastic elements. A series of force-velocity curves will be obtained at increasing levels of muscle activation ( $g_1, g_2$ , and  $g_3$ ) that will be parallel (B) if the viscosity is independent of force generation or convergent (C) at a point if the viscosity varies proportionally with activation. The point of convergence in (C) is the maximum unloaded shortening velocity.

Equation 25 can be solved for  $y$  and this value substituted into Equation 26, which gives

$$g(t) = a_3 x'''' + a_2 x''' + a_1 x'' + a_0 x \quad (27)$$

in which  $a_0 = [K_s K_i + K_p K_i + K_v K_i] / K_e$ ,  $a_1 = [D(K_s + K_p) + B(K_s + K_p)] / K_e$ ,  $a_2 = [M(K_s + K_p) + DB] / K_e$ , and  $a_3 = MB / K_e$ . Using Equation 27 we have

$$J_1 = E_v [a_3 \int_0^T x dt + a_0 \int_0^T x^2 dt] \quad (28)$$

if we assume as before that  $x = x' = x'' = 0$  at  $t=0$ , while  $x = X$  and  $x' = x'' = 0$  at  $t = T$ . Interestingly, only terms dependent on position (and not its derivatives) contribute to integral  $J_1$ .

In considering integral  $J_2$ , we will ignore the term involving  $K_p$  in Equation 26 because  $K_p$  is often small compared to  $K_e$  experimentally. If this assump-

tion is not made, the expressions become rather more complex but do not change in form. Using Equations 25 and 26,  $J_1$  can be written in the form

$$J_1 = \int_0^T [E_2/B]g(t)[g(t) - f(t)]dt. \quad (29)$$

As discussed in relation to Figure 3, terms involving the mass  $M$  are often dominant. Substituting from Equations 25 and 27 and ignoring terms that do not involve  $M$ , Equation 29 becomes

$$J_1 = \int_0^T (MB/K_1)(x'')^2 dt. \quad (30)$$

Hence, minimizing  $J_1$  (and energy consumption) involves minimization of jerk.

Up to this point no nonlinearities have been considered, although many types of nonlinearities have been observed for muscle. For example, the series elasticity is not a simple constant but depends on the force being generated (Ford, Huxley, & Simmons, 1977). Equation 30 can generally be derived from Equations 26 & 27, independent of the type of nonlinearity for  $K_1$ , but the evaluation of Equation 30 will obviously depend on the form of  $K_1$ .

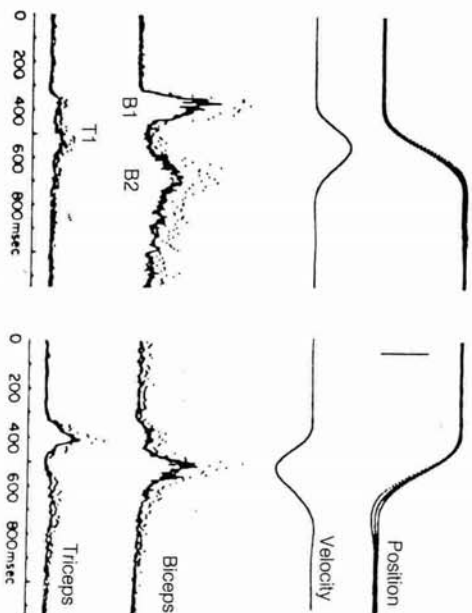
Similarly, Figures 7B and 7C show two simple approximations to the force-velocity curve of muscle (Hill, 1965). Figure 7B illustrates the form used in which the slope and hence the viscosity  $B$  are constants. The form in Figure 7C has a maximum velocity of shortening that is independent of the level of activation, as has been found experimentally in most, but not all, studies (Edman, 1979). If we had used the alternative form (see Figure 7C), Equation 29 would become

$$J_1 = \int_0^T [E_2/C]g(t) - f(t)]dt \quad (31)$$

in which  $C$  is a constant. There would now be no dependence on jerk or other derivatives, but only on  $x$  (see analysis of integral  $J_1$  above). Various other nonlinearities could be considered, but it may be more helpful at this point to discuss some of the results already obtained in relation to experimental data and their implications for the control of movement.

## Comparison With Experiments

In the previous sections, the forms of movements predicted by various control schemes have been calculated. Figure 8 shows experimental data from Cooke (1980) for a human subject holding a handle and moving the elbow from one angle to another. Similar data have been obtained by others (e.g., Abend, Bizzi, & Morasso, 1982). The data seem to be of the form expected for minimizing jerk (see Equations 12 and 14). Flash and Hogan (1982) suggested that jerk might normally be minimized in human arm movements.



**Figure 8.** Average position and velocity records for flexion (left) and extension (right) movements of the human elbow joint are shown. Below are the corresponding rectified and integrated EMG records from an elbow flexor (biceps) and an elbow extensor (triceps) muscle. Note the triphasic pattern (B1, T1, B2) associated particularly with the flexion movement. Standard deviations are given by the dotted lines on each part of the Figure (Cooke, 1980).

However, it should be noted that the handle was connected to a torque motor, so that movement was probably limited by the inertia of the arm and the assembly to which it was attached. There was no spring to act as a restoring force, and care is usually taken to minimize the viscosity in this sort of apparatus. Under such conditions, we have shown that exponential lags in the muscle, minimization of energy, or even the limits on muscle power can lead to an identical form of movement to that obtained by minimizing jerk. One way to distinguish these possibilities is to vary the conditions. For example, if movement time is increased, force limitations become less important, but the movement should simply be scaled up in time if jerk is being minimized. It is well known that slow movements are often segmented (Brooks & Thach, 1981), instead of remaining continuous in form. Having accelerations and decelerations in each segment would clearly not minimize jerk but would be reasonably efficient energetically because the muscle need only be activated occasionally and the movement could coast in between.

Another interesting condition would be to have the handle attached to a spring load with a substantial restoring force and low inertia. The predictions for minimum jerk would remain unchanged, but for minimum energy consumption the movement would be delayed so that energy would not be wasted to maintain the spring in an extended state (see Figure 3C). If no compensation were made by the brain at all, the movement would become asymmetric

in the opposite direction because the arm would initially move rapidly and would slow down as it encountered more and more resistance. Although experiments in which subjects work against spring loads have been conducted from time to time (Wilkie, 1950; Joyce & Rack, 1974), none have been analysed, to our knowledge, in relation to the predictions given above.

Another interesting point is that all the acceleration records shown here are biphasic. Positive force is required to accelerate the load and negative force to decelerate it. This will require pairs of antagonistic muscles (Oguztoreli and Stein, 1982). The control inputs will generally be triphasic if there are exponential lags and the movement time is comparable to the exponential time constant (see Figure 5). The electrical signals from muscles (EMGs) are generally triphasic (see Figure 8), having an initial period of agonist activity followed by antagonist activity and then a second period of agonist activity (Hallett, Shahani, & Young, 1975). Whereas the initial burst seems to be preprogrammed, the antagonist burst and the second agonist burst are correlated to the acceleration and deceleration, respectively (Chez & Martin, 1982) and may be reflex responses to those phases of the movement. However, the present calculations specify the optimal form of the movement under prescribed conditions, irrespective of whether the signals are preprogrammed or produced by feedback.

Muscles show a tremendous array of nonlinearities that have also been ignored here for the most part. For example, the two types of force-velocity curves considered are quite crude approximations of Hill's characteristic equation (Hill, 1965). However, any curve can be approximated by a straight line and a linearized force-velocity curve works surprisingly well under many conditions (Bawa et al., 1976; Cannon & Zahalak, 1982). We have purposely used simple models of muscle for the most part so that the form of the movement could be determined analytically under many conditions. Previous work on energy minimization has often involved more complex models with so many parameters that it has been difficult to know which ones had important effects on the overall results (Hatzel & Buys, 1977; Oguztoreli & Stein, 1983). Computation of results from such complex models remains a formidable task, even for the largest digital computers.

Over the past few years the progress in understanding the molecular basis of muscular contraction has been exciting. Clearly, there is a need to begin to integrate this information into theories that adequately explain the form of the complex, elegant, and beautiful movements of which all animals including man are capable. The work presented here represents a preliminary attempt toward such theories.

## Conclusions

The strategy for making a movement will clearly influence the form of the movement. By analysing various potential strategies, we may suggest what

variables could be optimized in human and animal movements. Optimizing kinematic variables such as the mean square velocity, acceleration, or jerk produces quite distinct movement patterns. Minimizing the mean square force produces patterns that depend on the nature of the load. Similarly, minimizing energy consumption by a muscle will depend on muscle properties. Constraints of the maximum force or time lags in force production tend to blur the differences between alternative strategies. Many natural movements are consistent with minimization of jerk. This form could arise from limitations of force output and time lags associated with muscular force production than from any computation carried out in the brain. Experiments to distinguish these possibilities are discussed. Minimum jerk movements will also minimize energy consumption by the muscle over a range of conditions.

## Discussion

Dr. Winter opened the discussion by congratulating Dr. Stein on his development of the topic, beginning with a simple ballistic movement without gravity and building up a picture of more complex movements involving different types of muscles and several joints, such as those involved in walking and running. Dr. Stein had shown that certain strategies were not functionally effective and that the variability of the load on the system and the characteristics of the muscle had to be considered. Dr. Winter pointed out that the situation that Dr. Stein had resolved by increasing the value of  $K$  could also be treated by increasing  $V$ . Dr. Stein agreed that one could make the system work in more than one way, but when this was carried out by increasing  $V$  it produced a very asymmetric movement that was limited by mass and inertia; the physiological implications were thus difficult to define. Dr. Winter wondered whether the model allowed for co-contraction, particularly if this might minimize energy. Dr. Stein answered that there were many ways in which the model might be improved and the effects of contraction of antagonistic muscles would be extremely important. Hogan had shown that if one wished to carry out a movement with extreme accuracy against the variable background, co-contraction was of great importance but would involve an energy cost. On the other hand, if the movement did not involve accuracy, co-contraction was less necessary and energy would be saved. This type of factor had not yet been built into the model.

Mr. Perrine wondered about the importance of isometric contractions; if no movement occurred, there was no power output, but in movements such as walking, isometric contractions might still be important. Dr. Faulkner had asked earlier whether a muscle might be totally activated in the gait cycle, but EMG evidence suggested that this was unlikely because the forces generated were not sufficiently large. Even in sprinting the joint velocities were not high, so single muscles might not be operating at full power. These considerations



were relevant to situations in which muscles of different contraction characteristics might be activated at the same time. One synergist might operate with another of quite different force velocity characteristics, and thus might not be capable of generating much power because the movement might be outside its optimal velocity range. On the other hand, if power was defined as the rate at which energy was produced and one considered events at the sarcomere level, then a muscle might operate powerfully even when it was generating energy that was absorbed by the elastic component without any associated shortening. This behavior might become very important in a movement associated with a large acceleration. An explosive isometric contraction in which energy was generated at the highest possible rate could start the movement, but then the muscle might be inhibited so as not to exceed structural limitations. At this point power might be generated but at a very submaximal level. Dr. Stein commented that although the muscle operated to dissipate a lot of energy, the external work under isometric conditions was still zero; in such a situation there was no output in the face of very high input and thus an efficiency of zero. Mr. Perrine was unhappy about the efficiency concept and felt we should be more concerned about the ability of muscles to generate energy at the sarcomere level, even though it may not be released externally.

Dr. Wilkie felt that much of the discussion had centered around concepts that were obvious 30 to 40 years ago, such as the nonlinearity in both the internal viscosity of muscle and in the force length curve of the series' elastic component (Wilkie, 1950). These factors had to be taken into account if one was going to model a muscle operating against an external load. One might summarize the laws of motion by saying that an object did not move until a certain force (i.e., the limiting frictional force) was exceeded. The harder one pulled, the faster the object moved; that was viscosity. The harder one pulled, the more rapidly it accelerated, and that was inertia. In presenting a picture of the performance of an external task, Dr. Stein did not appear to have taken friction into account, which even Galileo realized was inherent in the relationship between force and motion.

## References

- Abend, W., Bizzi, E., & Morasso, P. (1982). Human arm trajectory formation. *Brain*, 105, 331-348.
- Akhiezer, N.I. (1962). *The calculus of variations* (A.H. Frink, Trans.). New York: Blaisdell.
- Bawa, P., Mannard, A., & Stein, R.B. (1976). Predictions and experimental tests of a visco-elastic muscle model using elastic and inertial loads. *Biological Cybernetics*, 22, 139-145.
- Brady, M., Hollerbach, J., Johnson, T., Lozano-Perez, T., & Mason, M. (Eds.). (1982). *Robot motion: Planning and control*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Brooks, V.B., & Thach, W.T. (1981). Cerebellar control of posture and movement. In *Handbook of physiology* (Secs. 1-12, pp. 877-946). Bethesda, MD: American Physiology Society.
- Cannon, S.C., & Zahalak, G.I. (1982). The mechanical behavior of active human skeletal muscle in small oscillations. *Journal of Biomechanics*, 15, 111-121.
- Chaudet, R., & O'Shea, J. (1983). Validation of an adaptive robot control structure by means of simulation. In J. Brugger & Y. Jarry (Eds.), *Simulation in engineering sciences* (pp. 411-416). Amsterdam: Elsevier-North Holland.
- Cooke, J.D. (1980). The organization of simple skilled movements. In G.E. Stelmach & J. Requin (Eds.), *Tutorials in motor behavior* (pp. 199-212). Amsterdam: Elsevier-North Holland.
- Edman, K.A.P. (1979). The velocity of unloaded shortening and its relation to sarcomere length and isometric force in vertebrate muscle fibres. *Journal of Physiology* (London), 290, 143-159.
- Fan, L.-T. (1966). *The continuous maximum principle*. New York: John Wiley and Sons.
- Flash, T., & Hogan, N. (1982). Evidence for optimization strategy in arm trajectory formation. *Society for Neuroscience Abstracts*, 8, 282.
- Ford, L.E., Huxley, A.F., & Simmons, R.M. (1977). Tension responses to sudden length change in stimulated frog muscle fibres near slack length. *Journal of Physiology* (London), 269, 441-515.
- Chez, C., & Martin, J.H. (1982). The control of rapid limb movement in the cat: III. Agonist-antagonist coupling. *Experimental Brain Research*, 45, 115-125.
- Hallett, M., Shahani, B.T., & Young, R.R. (1975). EMG analysis of stereotyped voluntary movements in man. *Journal of Neurology, Neurosurgery and Psychiatry*, 38, 1154-1162.
- Hatze, H., & Buys, J.D. (1977). Energy-optimal controls in the mammalian neuromuscular system. *Biological Cybernetics*, 27, 9-20.
- Hill, A.V. (1964). The effect of load on the heat of shortening of muscle. *Proceedings of the Royal Society, London*, 159, 297-318.
- Hill, A.V. (1965). *Trails and trials in physiology*. London: Arnold.
- Hollerbach, J.M. (1980). *An oscillation theory of handwriting*. Unpublished doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Joyce, G.C., & Rack, P.M.H. (1974). The effects of load and force on tremor at the normal human elbow joint. *Journal of Physiology* (London), 240, 375-396.
- Nelson, W.L. (1983). Physical principles for economies of skilled movements. *Biological Cybernetics*, 46, 135-147.
- Oguztoreli, M.N., & Stein, R.B. (1982). Analysis of a model for antagonistic muscles. *Biological Cybernetics*, 45, 177-186.
- Oguztoreli, M.N., & Stein, R.B. (1983). Optimal control of antagonistic muscles. *Biological Cybernetics*, 48, 91-99.

- Pontryagin, L., Botvanskii, V., Gantkendze, R., & Mischenko, E. (1962). *The mathematical theory of optimal processes* (K.N. Trigoroff, Trans.). New York: Wiley Interscience.
- Sokolnikoff, I.S., & Redheffer, R.M. (1958). *Mathematics of physics and modern engineering*. New York: McGraw-Hill.
- Wilkie, D.R. (1950). The relation between force and velocity in human muscle. *Journal of Physiology* (London), 110, 249-280.

## Section

**4****Energy Metabolism**

### 4.3.3 Exkurs: Variationsrechnung

Um dieser Arbeit folgen zu können, müssen wir uns zuerst mit Optimierungsverfahren auseinandersetzen, damit wir „optimale“ Bewegungen selber herleiten oder deren Ableitung verfolgen und verstehen können.

Gegeben sei eine Menge von Wegen  $x(\eta, t)$ , parametrisiert durch  $\eta$ . Alle diese Wege gehen durch die zwei Punkte  $P_1 = \{x(\eta, t_1), t_1\}$  und  $P_2 = \{x(\eta, t_2), t_2\}$  für alle Werte von  $\eta$ . Ferner ist eine Funktion  $F$  von der Form

$$F(\dots) = F\left(x(\eta, t), \frac{\partial}{\partial t}x(\eta, t), t\right) \quad (4.9)$$

gegeben. Das Integral

$$I(\eta) = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x(\eta, t), \frac{\partial}{\partial t}x(\eta, t), t\right) dt \quad (4.10)$$

hat für die (differenzierbare) Kurve  $x(\eta_0, t)$ , die bei Punkt  $P_1$  beginnt und bei Punkt  $P_2$  endet, ein (relatives) Minimum bzw. Maximum, wenn das Integral für diese Funktion  $x(\eta_0, t)$  einen Wert annimmt, der für keine benachbarte Kurve (also:  $\eta \in U_{\eta_0}$ ) von  $P_1$  nach  $P_2$  kleiner bzw. grösser ist. Die Aufgabe der Variationsrechnung lautet: **Suche die Kurve  $x(\eta, t)$ , die das Integral zu einem Minimum oder Maximum macht.** Es gelang Euler, das Problem der Variationsrechnung auf Differentialgleichungen zurückzuführen. Das Resultat seiner Berechnungen lautet: Die Funktion  $x(t) = x(\eta_0, t)$  muss folgender Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} F(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial x} F(x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad (4.11)$$

Den Beweis dieser Aussage liefert die partielle Integration.

*Bemerkung: Im Eulerschen Ansatz wurde die Existenz der Lösung vorausgesetzt; es gibt viele Probleme, die sich zwar sinnvoll formulieren lassen, aber keine Lösung besitzen!*

## 4.4 Optimierung der Bewegung zur Maximierung mechanischer Grössen wie Impuls und Leistung

### 4.4.1 Einleitung und Zielsetzung

Stein geht in seiner Arbeit der Frage nach, welche mechanische oder physiologische Grösse bei einfachen Bewegungen optimiert sein könnte. Er analysiert Bewegungen mit gegebenem Startpunkt  $x(t = 0) = x_0$  und Endpunkt  $x(t = 1) = x_1$  und den Randbedingungen  $\dot{x}(t = 0) = 0$ ,  $\ddot{x}(t = 0) = 0$ ,  $\dot{x}(t = T) = 0$  und  $\ddot{x}(t = T) = 0$ . Seine Schlussfolgerung ist: **Viele Natürliche**

*Bewegungen sind konsistent mit der Forderung nach Minimalisierung des Funktionals*

$$\int_0^T (\text{jerk}(t))^2 dt = \text{minimal} \quad (4.12)$$

Der Ausdruck  $\text{jerk}(t)$  entspricht der zeitlichen Ableitung der Beschleunigung und wird im deutschsprachigen Raum auch als *Ruck* bezeichnet (without jerk = ruck-frei). Natürliche Bewegungen sind demzufolge möglichst glatte Bewegungen.

In folgendem Abschnitt suchen wir Bewegungen, die die mechanische Leistung maximieren. In Beispiel 1 (Kapitel ...) wird der Effekt der Ausholbewegung auf die Abwurfgeschwindigkeit, als typisches Beispiel einer azyklischen Bewegung, analysiert. Im Gegensatz dazu ist Radfahren ein typischer Vertreter einer zyklischen Bewegung. In Beispiel 2 (Kapitel ...) wird die Leistung beim Radfahren in Abhängigkeit von der Trittfrequenz untersucht. Im Gegensatz zu früheren ähnlichen Betrachtungen, bei denen nur das kontraktile Element berücksichtigt wurde (siehe Abbildung 4.3), wird in diesem Abschnitt auch das Serieelement und die Aktivierung des kontraktilen Elementes berücksichtigt. Um dieses komplexe Problem möglichst einfach zu halten, werden alle Muskelgruppen, die beim Fahrradfahren eine wichtige Rolle spielen, durch einen einzelnen Muskel vom Hill'schen Typus ersetzt. In weiteren Beispielen wird die Leistung bei zyklischen und azyklischen Bewegungen untersucht, bei denen der Antrieb von zwei Muskeln in Serie- bzw. in Parallelschaltung hervorgerufen wird.

#### 4.4.2 Beschreibung des Motors „Muskel“

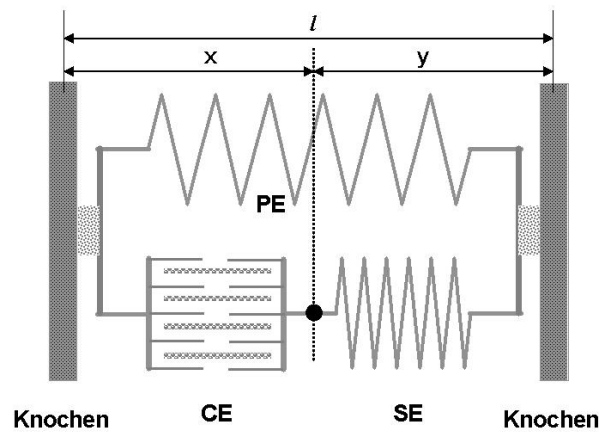
Der Motor „Muskel“ wird im Hill-Diagramm (siehe Abbildung 4.6) durch drei Elemente beschrieben: das kontraktile Element (**CE**), das Serie- und das Parallelelement (**SE**) bzw. (**PE**). Bei dieser Unterteilung weist das kontraktile Element die theoretische Länge  $x$  und das Serieelement die theoretische Länge  $y$  auf. Die Länge des Muskels, eine reale Größe, beträgt  $l = x + y$ .

Das Serie- und Parallelelement werden als elastische Bänder beschrieben. Diese zwei Elemente werden im ersten Ansatz durch „einseitige“ ideale Federn dargestellt. Mit einseitig wird die Eigenschaft ausgedrückt, dass ein Gummiband nur Zugkräfte und keine Druckkräfte aufnehmen kann. Die Kraft-Längen-Relation dieser zwei Elemente werden durch die folgenden Ausdrücke mathematisch beschrieben:

$$F_{PE}(l, \dot{l}) \approx F_{PE}(l) \begin{cases} k_{PE} \cdot (l - l_0) \equiv k_{PE} \cdot \Delta l & \text{falls: } \Delta l \geq 0 \\ 0 & \text{falls: } \Delta l \leq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

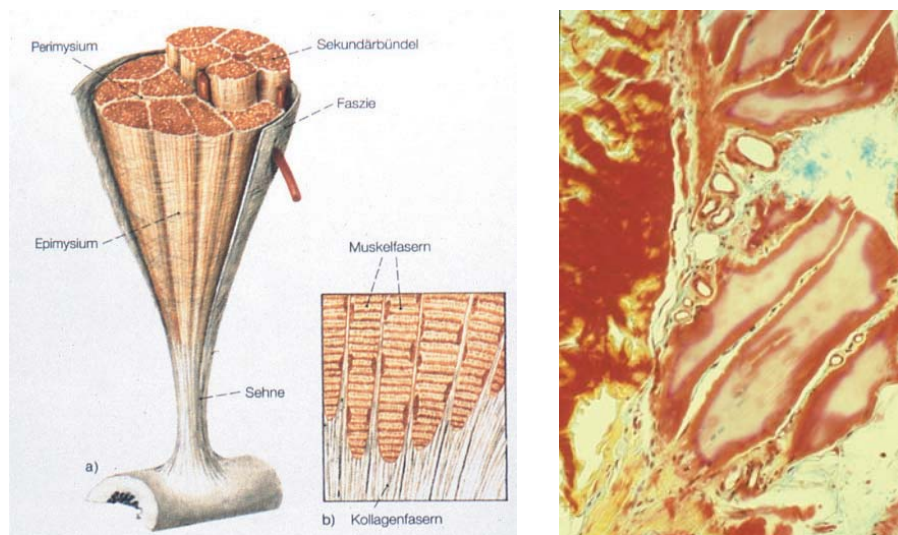
$$F_{SE}(y, \dot{y}) \approx F_{SE}(y) \begin{cases} k_{SE} \cdot (y - y_0) \equiv k_{SE} \cdot \Delta y & \text{falls: } \Delta y \geq 0 \\ 0 & \text{falls: } \Delta y \leq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Diese Vereinfachung erlaubt auch einige analytische Betrachtungen. Weiter unten, im Abschnitt Simulationen, wird sowohl eine nichtlineare wie auch eine geschwindigkeitsabhängige Komponente dazu gefügt.



**Abbildung 4.6:** Schematisches Bild des Motors Muskel. Die drei Elemente nach Hill sind: Das kontraktile Element (CE) mit Länge  $x$ , das Serie- (SE) mit Länge  $y$  und das Parallelelement (PE) mit Länge  $l$ ,  $l = x + y$ .

Mit steigender Aktivität werden mehr Fasern rekrutiert. Da jede Muskelfaser über eine individuellen Sehnenfaser der Länge  $l_{SE_{indiv}}$  und einen Sehnenabschnitt der Länge  $l_{SE_{bulk}}$  verfügt (siehe Abbildung 4.7), ist das Elastizitätsmodul der Sehne und damit die Federkonstante des Serieelementes von der Aktivität abhängig. Diese Eigenschaft wird durch die Schreibweise  $k_{SE} = k_{SE}(Z)$  zum Ausdruck gebracht. Analytische Ausdrücke, die diese Abhängigkeit beschreiben, sind das Resultat von Serie- und Parallelschaltung von elastischen Elementen (Serieschaltung:  $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ ; Parallelschaltung:  $k = k_1 + k_2$ ). Falls die elastischen Elemente durch identische ideale Federn beschrieben werden können, die zwei Sehnenabschnitte gleich lang sind und das gleich E-

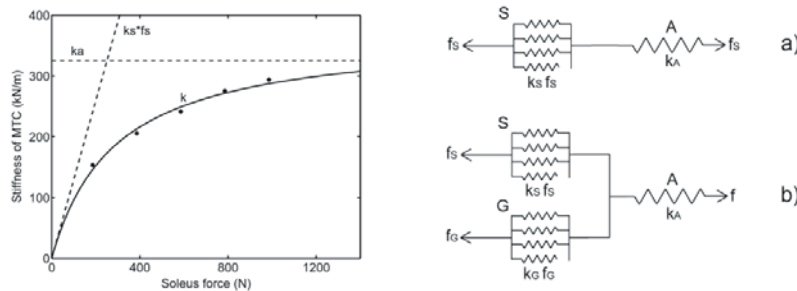


**Abbildung 4.7:** Bild des Muskel-Sehnen-Übergangs. Links ein schematisches, rechts ein histomorphologische Bild. Beachte: Jede Muskelfaser ist über eine individuelle Sehnenfaser, die dann zur „eigentlichen“ Sehne „verschmolzen“ sind mit dem Knochen verbunden.

Modul aufweisen, dann ist die Aktivitätsabhängigkeit der Federkonstante von der Form:

$$k_{SE}(Z) = \frac{Z}{1 + Z} \cdot k_{SE_{Abschnitt}} \quad (4.15)$$

Diese Überlegungen sind von Babic und Lenarcic (2004) experimentell umgesetzt worden. Die Modellvorstellung und die daraus resultierende Abhängigkeit der Federkonstante der Sehne von der Muskelaktivität sind in der unteren Abbildung (4.8 dargestellt).



**Abbildung 4.8:** Bild links: (Originaltext) Elastic stiffness of the human triceps surae MTC as a function of muscle load (continuous line) and contributions of individual components, i.e. the stiffness of the Achilles tendon ( $k_A$ ) and the stiffness of the soleus muscle ( $k_S f_S$ ) (dashed lines), to the overall stiffness. Bild rechts: (Originaltext) (a) Interpretation of triceps surae MTC stiffness in terms of an elastic model incorporating the Achilles tendon and the soleus used in the Flexion trial and (b) an elastic model of the entire triceps surae MTC incorporating the Achilles tendon, the soleus and the gastrocnemius used in the Extension trial. A represents the Achilles tendon with stiffness  $k_A$ , S represents the soleus with stiffness that is a product of tension  $f_S$  and a constant  $k_S$ , G represents the gastrocnemius with stiffness that is the product of tension  $f_G$  and a constant  $k_G$ . Aus Babic und Lenarcic, Eur J Appl Physiol (2004), 92, 477-484.

Um mit der Aktivität „natürliche“ Bewegungen beschreiben zu können, wird das kontraktile Element durch verallgemeinerte Hill-Kurven dargestellt. Die Kraft des kontraktile Elementes bei exzentrischen Bewegungen kann auf ähnliche Weise verallgemeinert werden, wie wir dies bei der Hill-Kurve getan haben. Die untere Funktion (Formel 4.16) zweite Zeile beschreibt das qualitative Verhalten des Muskels im exzentrischen Bereich. Sie ist als Exponentialfunktion gewählt und beinhaltet zwei Eigenschaften der Muskulatur:

- *Kriterium 1:* die maximale Kraft im exzentrischen Bereich ist ca. 1.8 mal grösser als die isometrische Kraft bei gleicher Aktivität.
- *Kriterium 2:* Die Steilheit der Kraft-Geschwindigkeits-Kurve weist beim Übergang vom konzentrischen in den exzentrischen Bereich eine Unstetigkeit auf; der Sprung in der Steigung beträgt ca. einen Faktor 6.

$$F_{CE}(Z, x, \dot{x}) = \begin{cases} P_0(Z, x) - (P_0(Z, x) + a(Z, x)) \frac{-\dot{x}}{-\dot{x} + b(Z)} & -\dot{x} \geq 0 \\ P_0(Z, x) (1.8 - 0.8 \exp(-\frac{6}{0.8} \frac{P_0(Z, x) + a(Z, x)}{P_0} \frac{\dot{x}}{b(Z)})) & +\dot{x} \leq 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

*Bem.: Aus Gründen einer Vereinfachung wird dieser exzentrische Ast der Kraft-Geschwindigkeits-Kurve oft auch durch die natürliche Fortsetzung der Hill-Kurve dargestellt. Die Bewegung wird dann gestoppt, sobald die exzentrische Kraft das 1.8-fache der isometrischen Kraft bei gleicher Aktivität überschreitet.*

Die charakteristischen Parameter bzw. Funktionen  $P_0(Z, x)$ ,  $a(Z, x)$  und  $b(Z)$  in Formel 4.16 sind hier durch folgende analytische Ausdrücke gegeben (siehe Kapitel 2):

$$\begin{aligned} P_0(Z, x) &= Z \cdot P_0 \cdot f_0(x) \\ a(Z, x) &= (a_0 + a_1 Z) \cdot \frac{1 + 3f_0(x)}{4} \\ b(Z) &= b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit:

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{isometrische Maximalkraft} \\ f_0(x) &= \text{die normierte Kraft-Längen-Relation und} \\ f_0(x \in X_{\text{Plateaubereich}}) &= 1 \end{aligned}$$

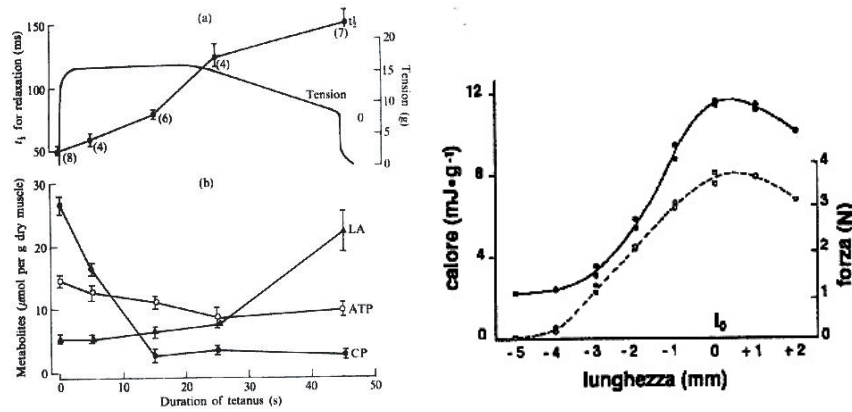
*Bem.: Die obige Funktion für die isometrische Kraft in Abhängigkeit von der Länge und der Aktivität stellt eine einfache Approximation der experimentellen Resultate von Einzelfasern dar. Die Parameter  $a_0, a_1$  und  $b_0, b_1, b_2$  geben die wesentlichen Beobachtungen der Experimente von Phillips und Petrofsky sowie jene von di Prampero wieder.*

Das Henneman-Prinzip beschreibt die Zuschaltung neuer motorischen Einheiten; die Regel lautet: mit zunehmendem  $Z$  werden grössere motorische Einheiten dazu geschaltet. Der Übergang von einem Fasertyp zum nächsten wird durch Schwellenwerte charakterisiert. Um die Beschreibung möglichst einfach zu halten, werden hier nur Typ I und Typ II-Fasern betrachtet. Der Schwellenwert  $Z_{\text{Schwelle}}$  für diesen Übergang ist definiert durch folgende Relation:

$$P_0(Z = Z_{\text{Schwelle}}, x \in X_{\text{Plateaubereich}}) = 25N/cm^2 \cdot A_{0, \text{Typ I}} \quad (4.18)$$

Typ II-Fasern produzieren Laktat. Falls die Laktatproduktionsrate grösser ist als die Abbaurate, wird Laktat akkumuliert und dabei die Kraftproduktion des kontraktiven Elementes verkleinert (siehe Abbildung 4.9). Auf eine analytische Beschreibung dieses Zusammenhangs wird hier verzichtet. Die Wärmeproduktionsrate des CE wird für die Betrachtungen in diesem Abschnitt durch die zweite Formel von Hill beschrieben, gegeben durch:

$$\dot{Q}_{CE}(Z, x, \dot{x}) = \frac{a(Z, x)}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{F_{CE}(Z, x, \dot{x})}{P_0(Z, x)} \right\} \cdot (b(Z) - \dot{x}) \quad (4.19)$$



**Abbildung 4.9:** Links oberes Bild: Die isometrische Kraft und die Relaxationszeit als Funktion der Dauer des Tetanuszustandes. Links unteres Bild: Laktat-, ATP- und Kreatinphoshat als Funktion der Dauer des Tetanuszustandes. Aus diesem Graph kann die Abhängigkeit der isometrischen Maximalkraft von der Laktatkonzentration grob abgelesen werden. Rechts: Wärmeproduktionsrate und isometrische Maximalkraft in Abhängigkeit von der Muskellänge. Eine grobe Approximation liefert die Relation:  $\dot{Q}(x, v) = c_0 + c_1 \cdot F_{CE}(x, 0)$ .

## Die Muskelkraft als Funktion von Aktivität, Länge und Verkürzungsgeschwindigkeit

Die Kraft, die das System Muskel gegen aussen erzeugen kann, ist abhängig vom Zustand des Muskels. Dieser Zustand wird durch das Tripel  $Z, l, \dot{l}$  zum Zeitpunkt  $t$  durch die unteren Differentialgleichungen und die Anfangsbedingungen beschrieben:

$$F_{Muskel}(Z, x, \dot{x}) = F_{CE}(Z, x, \dot{x}) + F_{PE}(l) \quad (4.20)$$

mit :

$$\begin{aligned} F_{CE}(Z, x, \dot{x}) &= F_{SE}(Z, y) \\ l &= x + y \end{aligned} \quad (4.21)$$

und damit auch:

$$\dot{l} = \dot{x} + \dot{y}$$

Die momentane mechanische Leistung des kontraktiven Elementes bzw. des Muskels beträgt:

$$L_{CE}(Z, x, \dot{x}) = F_{CE}(Z, x, \dot{x}) \cdot \dot{x}$$

bzw. :

$$L_{Muskel}(Z, l, \dot{l}) = F_{Muskel}(Z, l, \dot{l}) \cdot \dot{l} \quad (4.22)$$

und :

$$L_{Muskel}(Z, l, \dot{l}) = L_{CE}(Z, x, \dot{x}) + L_{SE}(Z, y) + L_{PE}(Z, l, \dot{l})$$



Die notwendige Energiezufuhr für den kontraktile Teil des Systems Muskel ist gegeben durch:

$$\dot{E}_{CE}(Z, x, \dot{x}) = L_{CE}(Z, x, \dot{x}) + \dot{Q}_{CE}(Z, x, \dot{x}) \quad (4.23)$$

Die Energiezufuhr ist einerseits beschränkt durch die maximale Sauerstoffaufnahme und die momentane maximale Laktatproduktionsrate. Andererseits wird zum Beispiel für die Herztätigkeit, die Atmung oder die Thermoregulation des übergeordneten Systems Mensch bzw. Lebewesens Energie verbraucht. Aber auch Wärmeverluste z.B. in Serie- und Parallelelemente sind je nach Situation durch einen Energiefluss zu decken. All diese Energieformen werden im Ausdruck  $\dot{E}_0$  formal zusammengefasst. Für ein System aus N Muskeln folgt damit aus der Energiebilanz, dass für die eigentliche Bewegung eine maximale Energie  $\dot{E}_{Bewegung}$  zur Verfügung steht. Diese lautet:

$$\dot{E}_{Bewegung} = \sum_{j=1}^{j=N} (L_j + \dot{Q}_j) - \dot{E}_0(T_{aussen}, \dots) \quad (4.24)$$

$$= c_1 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(PCr) + c_2 \cdot \dot{V}_{O_2} + c_3 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\text{Laktat}) - \dot{E}_0(T_{aussen}, \dots) \quad (4.25)$$

*Bemerkungen: (1) Spielt die Betriebstemperatur (d.h. die Temperatur des CE), die Laktatkonzentration oder die Aussentemperatur eine wichtige Rolle, dann müssen die obigen Formeln dementsprechend angepasst werden. (2) Die maximale Sauerstoffaufnahme ist durch das Atmungs- und Herzkreislauf-System bestimmt und nicht durch die Muskulatur, die Sauerstoff verbraucht. Durch Einatmen von reinem Sauerstoff anstelle von Luft kann die aerobe muskuläre Leistung erhöht werden (siehe Abbildung 4.10).*

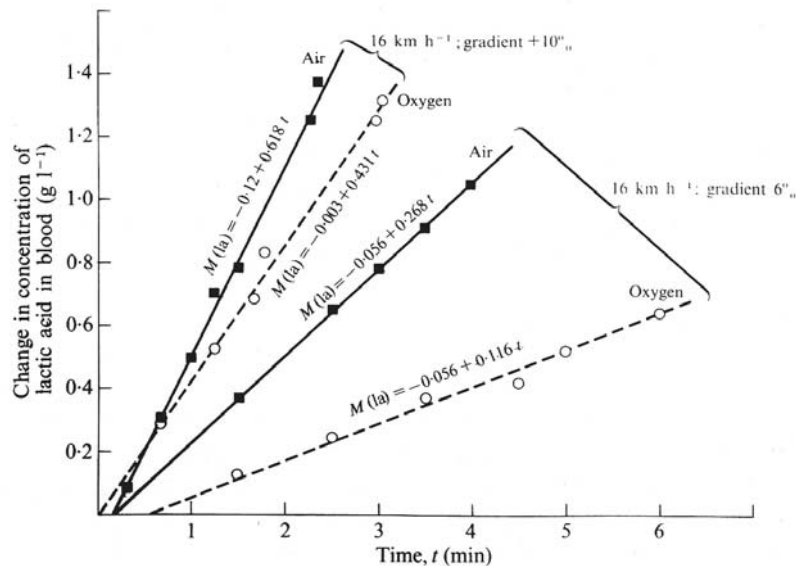


Abbildung 4.10: ... . Nach Margaria, 1976.

## Einfache Simulationen

Um die Resultate der nachfolgenden Beispiele verständlicher zu gestalten, wird in diesem Abschnitt das komplexe Verhalten der Muskulatur in speziellen Situation oder Versuchsbedingungen simuliert und analysiert. Gesteuert wird die Muskelkraft durch das Aktivierungsmuster, welches bisher mit  $Z(t)$  bezeichnet wurde. Mit dem Symbol  $Z(t)$  wurde der Aktivitätszustand bezeichnet und für stationäre Zustände wurde dieser proportional gesetzt zur isometrischen Muskelkraft. Die Regulierung des Aktivitätszustandes  $Z(t)$  soll hier etwas verfeinert und im Ansatz ebenfalls etwas fundamentaler durch die Aktivierung  $Akt(t)$  der Muskelfasern beschrieben werden. Das Signal  $Akt(t)$  soll die Aktionspotentiale darstellen. Diese Potentiale haben zur Folge, dass durch die Depolarisierung der Membran  $Ca^{++}$ -Ionen ausgeschüttet werden. Andererseits werden die  $Ca^{++}$ -Ionen ständig ins Sarcolemma zurückgepumpt. Diese zwei Eigenschaften führen zu einer zeitabhängigen  $Ca^{++}$ -Konzentration, die hier - ebenfalls vereinfacht - durch eine Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben wird. Diese Differentialgleichung ist von der Form

$$\dot{\rho}_{Ca^{++}}(t) = A_1 \cdot Akt(t - \tau) - A_2 \cdot \rho_{Ca^{++}}(t) \quad (4.26)$$

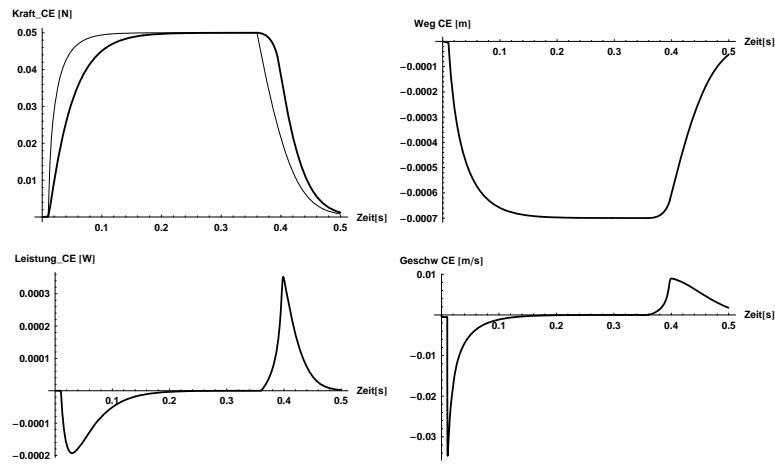
wobei  $\tau$  die mittlere Diffusionszeit angibt. Die isometrische Muskelkraft  $F_{CE}$  ist (für Längen im Plateaubereich d.h.  $x \in Plateau$ ) gegeben durch die  $Ca^{++}$ -Konzentration. Diese Relation wird durch eine sigmoide Kurve beschrieben - wir setzen folgenden Ausdruck dafür ein:

$$F_{CE}(\rho_{Ca^{++}}, x \in Plateaubereich, 0)(t) \sim Z = \frac{[\log(\rho_{Ca^{++}}(t))]^2}{C_0^2 + [\log(\rho_{Ca^{++}}(t))]^2} \quad (4.27)$$

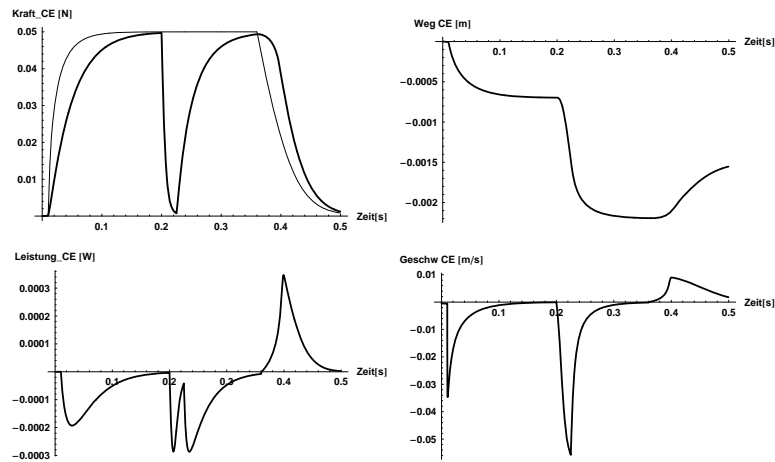
Die zeitliche Entwicklung dieser Grössen wird zum besseren Verständnis der Zusammenhänge an zwei einfachen Situation simuliert. Die zwei Beispiele stellen eine so genannte isometrische wie eine isotonische Kontraktion dar. Die isometrische Kontraktion beschreibt die Kraft, die der Muskel zu erzeugen vermag bei maximaler Aktivierung unter konstanter Länge.

**(a) Isometrische Kontraktion** Ein kleiner Muskel vom Hill'schen Typus wird unter isometrischen Bedingungen vom Zeitpunkt  $t = 0$ s an für eine Zeitspanne  $\Delta t = 0.35$ sec aktiviert. Dies bedeutet, dass die Aktivität  $Akt(t)$  konstant und verschieden von Null ist in diesem Zeitbereich. Berechnet wurde daraus der zeitliche Verlauf der  $Ca^{++}$ -Konzentration, der Aktivitätszustand  $Z(t)$ , die isometrische Kraft  $F_{CE}(t)$  und interne Grössen wie die Länge des kontraktilen Elementes  $x_{CE}(t)$  und dessen zeitliche Ableitung. Einige dieser Grössen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Der Muskel ist durch folgende Zahlen charakterisiert:

$$\begin{aligned} l_0 &= 1 \text{ cm}, A = 0.2 \text{ mm}^2, P_0 = 0.05 \text{ N}, \\ a/P_0 &= 0.25, b = 1.5l_0/s, v_{max} = 0.06 \text{ m/s}, \\ F_{SE} &= k_{SE1} \cdot \Delta y + k_{SE2} \cdot \Delta y^2 \\ \text{mit: } k_{SE1} &= \frac{0.25}{0.07} \cdot \frac{P_0}{l_0} \text{ und } k_{SE2} = \frac{0.75}{0.07^2} \cdot \frac{P_0}{l_0^2} \end{aligned}$$



**Abbildung 4.11:** Isometrische Kontraktion. Der Muskel wird 0.35 s lang aktiviert, Beginn der Aktivierung ist bei  $t = 0$  s. Die Aktivierung ist nicht graphisch dargestellt. Oben links: Dicke Linie: Der Kraft-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes. Dünne Linie: der Aktivitätszustand  $Z(t)$  multipliziert mit  $P_0$ . Beachte die zeitliche Verschiebung des Aktivitätszustandes nach rechts. Oben rechts: Der Weg-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes. Unten links: Der Leistungs-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes. Unten rechts: Der Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes.



**Abbildung 4.12:** Isokinetische Kontraktion. Der Muskel wird 0.35 s lang aktiviert, Beginn der Aktivierung ist bei  $t = 0$  s und nach 0.2 s kann sich der Muskel bei maximaler Geschwindigkeit für 20 msec verkürzen. Oben links: Dicke Linie: Der Kraft-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes. Dünne Linie: der Aktivitätszustand  $Z(t)$  multipliziert mit  $P_0$ . Oben rechts: Der Weg-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes. Unten links: Der Leistungs-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes. Unten rechts: Der Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf des kontraktilen Elementes.

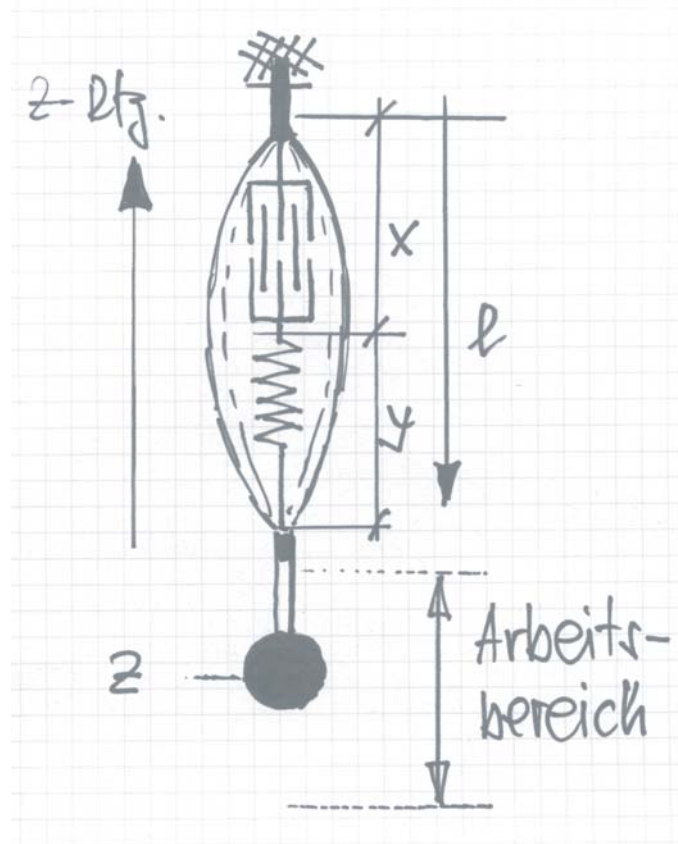
(b) **Isokinetische Kontraktion** Die Länge des Muskels ist so gesteuert, dass sich dieser bei maximaler Verkürzungsgeschwindigkeit sich zusammenziehen kann. Einige Diagramme sind unten dargestellt. Mehr dazu in der Vorlesung.

## 4.5 Beispiele zur Bewegungsoptimierung

### 4.5.1 Die Ausholbewegung

Die Ausholbewegung, die hier analysiert wird, ist stark vereinfacht. Ein Muskel hat die Aufgabe, einen Massenpunkt der Masse  $m$  im Gravitationsfeld möglichst hoch zu werfen (Abbildung 4.13). Die Anforderung „möglichst hoch werfen“ ist gleichwertig mit der Forderung, dass der Massenpunkt eine möglichst grosse Abwurfgeschwindigkeit an der Stelle  $z(t) = z_0$  besitzt, so z.B. am oberen Ende des Arbeitsbereiches des Muskels. Die Kräfte, die am Massenpunkt angreifen sind:

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g + F_{Muskel}(Z, l, \dot{l}) \quad (4.28)$$



**Abbildung 4.13:** Schematische Darstellung von Muskel und Wurfkörper beim senkrechten Wurf. Der Muskel besitzt die Länge  $l(t)$ , aufgeteilt in die hypothetische Länge des kontraktilen Elementes  $x(t)$  sowie des Serielementes  $y(t)$ . Die Koordinate des Massenpunktes ist mit  $z(t)$  bezeichnet.

wobei  $z$  die Koordinate des Massenpunktes,  $m$  deren Masse und  $g$  die Erdbeschleunigung angibt (Beachte:  $z$  ist die Koordinate des Massenpunktes,  $Z$  der Aktivitätszustand des Muskels). Die  $z$ -Rtg. zeigt nach oben und ist der Gravitationskraft entgegengerichtet. Die Muskellänge wird entgegen der  $z$ -Rtg. gemessen, d.h. wenn sich der Muskel verkürzt, wird die Masse angehoben. Der Arbeitsbereich (siehe Abbildung 4.13) soll innerhalb des Plateaubereiches der Kraft-Längen-Relation des kontraktiven Elementes liegen. Die Begründung für diese Annahme ist einleuchtend, nämlich: Formeln vereinfachen! Der Plateaubereich beträgt ca. 10% der Länge des kontraktiven Elementes. Durch diese Einschränkung ist auch der Einfluss des Parallelelementes auf die Dynamik eher bescheiden und wird für die weiteren Betrachtungen vernachlässigt. Damit entfallen alle Abhängigkeiten der  $x$ -Variable sowohl in den Kraftausdrücken als auch in den Ausdrücken für die Wärmeproduktion. Im Weiteren soll der Muskel in diesem ersten Beispiel ein „reiner Typ“ sein, d.h. der Muskel besteht aus einem einzigen Fasertyp. Die dazugehörige Formel für die Muskelkraft des kontraktiven Elementes lautet:

$$F_{CE}(Z, \dot{x}) = Z \cdot \begin{cases} P_0 - (P_0 + a) \frac{-\dot{x}}{-\dot{x} + b} & -\dot{x} \geq 0 \\ P_0 \cdot (1.8 - 0.8 \cdot \exp(-\frac{6}{0.8} \frac{P_0 + a \dot{x}}{P_0} \frac{\dot{x}}{b})) & -\dot{x} \leq 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Für Verkürzungsgeschwindigkeiten  $v = -\dot{x}$ , die grösser sind als die maximale Verkürzungsgeschwindigkeit  $v_{max}$  ist die Kraft gleich Null. Etwas umgeformt lautet diese Beziehung:

$$F_{CE}(Z, \dot{x}) = Z \cdot \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) \quad (4.30)$$

mit

$$\tilde{F}_{CE}(\dot{x}) = \begin{cases} P_0 - (P_0 + a) \frac{-\dot{x}}{-\dot{x} + b} & -\dot{x} \geq 0 \\ P_0 \cdot (1.8 - 0.8 \cdot \exp(-\frac{6}{0.8} \frac{P_0 + a \dot{x}}{P_0} \frac{\dot{x}}{b})) & -\dot{x} \leq 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Damit vereinfacht sich die mathematische Beschreibung der Ausholbewegung auf folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{z} &= Z \cdot \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) - m \cdot g \\ Z \cdot \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) &= \frac{Z}{1+Z} \cdot k_{SE} \cdot \Delta y \\ &\text{oder} \\ \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) &= \frac{1}{1+Z} \cdot k_{SE} \cdot \Delta y \\ &\text{und} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$z(t) = -l(t) = -(x(t) + y(t)), \text{ falls } : Z \cdot \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) \geq mg$$

Aus der Formel in der zweiten Zeile folgt, dass die Variable  $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$  durch die Variable  $\dot{x}(t)$  ausgedrückt werden kann. Die Differenz  $\Delta y(t)$  wird zu:

$$\Delta y(t) \equiv y(t) - y_0 = (1 + Z(t)) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \quad (4.33)$$

Dieser Ausdruck eingesetzt in die erste Zeile der obigen Formel für  $z(t)$  liefert eine Differentialgleichung für die Länge des kontraktiven Elementes bei der Ausholbewegung. Diese Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{z}(t) &= -m \cdot (\ddot{x}(t) + \ddot{y}(t)) \\ &= -m \cdot \ddot{x}(t) - m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \Delta y(t) \\ &= -m \cdot \ddot{x}(t) - m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left( (1 + Z(t)) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \right) = Z \cdot \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) - m \cdot g \end{aligned} \quad (4.34)$$

Der zweite Term in der letzten Zeile kann unter Anwendung der Kettenregel umgeschrieben werden. Die erste Differentiation ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt} \left[ (1 + Z(t)) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \right] \\ &= \dot{Z}(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} + (1 + Z(t)) \cdot \frac{d}{dt} \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \\ &= \dot{Z}(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} + (1 + Z(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \cdot \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

und die zweite:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \left[ (1 + Z(t)) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \right] \\ &= \ddot{Z}(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} + 2 \cdot \dot{Z}(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE,v}(\dot{x})}{k_{SE}} \cdot \dot{x}(t) \\ &\quad + (1 + Z(t)) \cdot \left( \frac{\tilde{F}_{CE,v^2}(\dot{x})}{k_{SE}} \dot{x}^2(t) + \frac{\tilde{F}_{CE,v}(\dot{x})}{k_{SE}} \frac{d^3}{dt^3} x(t) \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

unter Verwendung der üblichen Abkürzungen für partielle Ableitungen. Die Differentialgleichung (für die Länge des kontraktiven Elementes  $x(t)$ ), die die Ausholbewegung beschreibt, nimmt zusammenfassend - jedoch nicht geordnet - folgende komplexe Form an:

$$\begin{aligned} -\ddot{x}(t) &= -g + (1 + Z(t)) \cdot \left\{ \frac{\tilde{F}_{CE,v^2}(\dot{x})}{k_{SE}} \dot{x}^2(t) + \frac{\tilde{F}_{CE,v}(\dot{x})}{k_{SE}} \frac{d}{dt} \dot{x}(t) \right\} \\ &\quad + \ddot{Z}(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} + 2 \cdot \dot{Z}(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE,v}(\dot{x})}{k_{SE}} \cdot \dot{x}(t) \\ &\quad + Z(t) \cdot \frac{\tilde{F}_{CE}(\dot{x}(t))}{m} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Gleichung gilt unter der Bedingung  $Z(t) \cdot \tilde{F}_{CE}(\dot{x}) \geq m \cdot g$ . Für diese Art von nichtlinearen Differentialgleichungen 2-ter Ordnung in  $\dot{x}$  gibt es keine allgemeinen Lösungen. Zudem spielen die Anfangsbedingungen des Systems Muskel / Massenpunkt eine wichtige Rolle. Die Diskussion dieser Differentialgleichung wird daher einerseits anhand der linearisierten Form der Differentialgleichung und andererseits durch Simulationen vorgenommen.

### Linearisierte Form der Differentialgleichung

Die stückweise (grobe) Linearisierung der Kraft-Geschwindigkeits-Relation führt zu folgendem Ergebnis:

$$\tilde{F}_{CE}(\dot{x}) \approx \bar{F}_{CE}(\dot{x}) = \begin{cases} 0 & \dot{x} \leq -v_{max} \\ P_0 + \gamma \cdot \dot{x} & -v_{max} \geq \dot{x} \geq 0 \\ P_0 + \Gamma \cdot \dot{x} & \dot{x} \geq 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

mit  $\gamma = \frac{P_0}{v_{max}}$  und  $\Gamma = 6 \cdot \gamma$ . Im exzentrischen Bereich ist die Kraft in den obigen Formeln nicht beschränkt. Übersteigt die Kraft (im exzentrischen Bereich) den Wert von etwa  $1.8 P_0$  so wird der Muskel verletzt.

Die erste (partielle) Ableitung der Kraft nach der Geschwindigkeit liefert den Ausdruck:

$$\bar{F}_{CE,v}(\dot{x}) = \begin{cases} 0 & \dot{x} \leq -v_{max} \\ \gamma & -v_{max} \geq \dot{x} \geq 0 \\ \Gamma & \dot{x} \geq 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

und die zweite (partielle) Ableitung wird zu Null. Mit diesen Vereinfachungen und bei sprunghaftem Einschalten des Aktivitätszustandes  $Z$  (d.h.  $\dot{Z} = 0$  und  $\ddot{Z} = 0$  für  $t > 0$ ) nimmt die linearisierte Differentialgleichung für die Variable  $v = \dot{x}$  die Form

$$-\dot{v} = -g + \begin{cases} 0 & v \leq -v_{max} \\ \frac{P_0 + \gamma \cdot v}{m} + 2 \frac{\gamma}{k_{SE}} \ddot{v} & -v_{max} \geq v \geq 0 \\ \frac{P_0 + \Gamma \cdot v}{m} + 2 \frac{\Gamma}{k_{SE}} \ddot{v} & v \geq 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

an. Die linearisierte Differentialgleichung lautet (für die exzentrische Phase):

$$\ddot{v} + \frac{k_{SE}}{2 \cdot \Gamma} \cdot \dot{v} + \frac{k_{SE}}{2 \cdot m} \cdot v + \frac{k_{SE}}{2 \cdot \Gamma} \left( \frac{P_0}{m} - g \right) = 0 \quad (4.41)$$

oder auf die allgemeine Form gebracht mit der Variable  $\eta$  anstelle von  $v$  nimmt die linearisierte Differentialgleichung eine bekannte Form ein, nämlich:

$$\ddot{\eta} + a_2 \cdot \dot{\eta} + a_1 \cdot \eta + a_0 = 0 \quad (4.42)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit den Anfangsbedingungen  $C_1$  und  $C_2$  hat die Form:

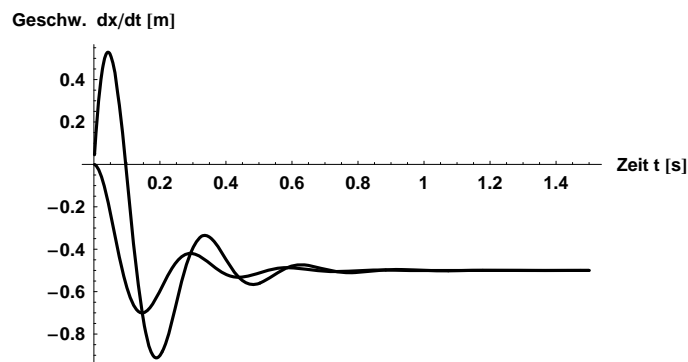
$$\eta(t) = -\frac{a_0}{a_1} + C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}\{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1}\}t} + C_2 \cdot e^{\frac{1}{2}\{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1}\}t} \quad (4.43)$$

Diese Differentialgleichung, die das Verhalten des gedämpften harmonischen Oszillators beschreibt, wie auch das Phänomen der Resonanz aber auch das Einschwingen des Systems wurden als Übungsaufgabe berechnet und besprochen. Die wichtigsten Erkenntnisse sind:

- Der gedämpfte harmonische Oszillator: ...
- Das Phänomen der: ... Resonanz
- Das Einschwingen: ...

## Simulation und Illustration

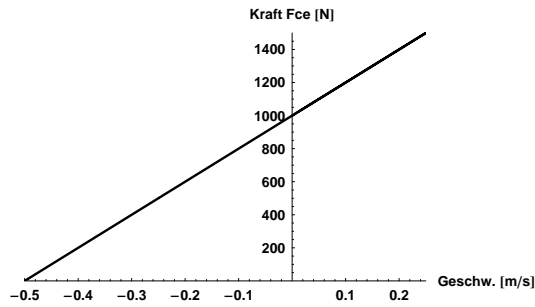
Zuerst soll die Ausholbewegung anhand der linearisierten Bewegungsgleichung analysiert und illustriert werden. Für diese Betrachtungen wird das Schwerfeld vernachlässigt, was gleichbedeutend ist mit einer Ausholbewegung in horizontaler anstatt in vertikaler Richtung. Die linearisierte Bewegungsgleichung - ohne weitere Bedingungen an die Kraft-Geschwindigkeits-Relation - beschreibt das Verhalten des gedämpften harmonischen Oszillators und sie besitzt eine einfache bekannte analytische Lösung. Die Variable *Geschwindigkeit des kontraktiven Elementes*  $\dot{x}(t)$ , als Beispiel, zeigt das typische Verhalten einer gedämpften Schwingung (siehe Abbildung 4.14). Eine stationäre Lösung der Differentialgleichung ist  $\dot{x}(t) = \text{const} = -v_{max}$ , d.h. für grosse Zeiten erreicht die Geschwindigkeit diesen Wert!



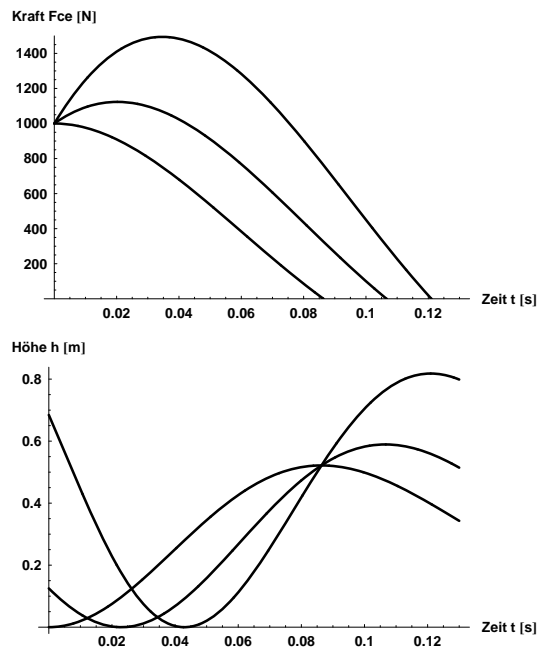
**Abbildung 4.14:** Der Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf des kontraktiven Elementes als Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung ohne Nebenbedingungen. Die Anfangsbedingungen sind:  $\dot{l}(t) = v_{aus} = 0$  m/s bzw. 2 m/s. Die Anfangsbedingung  $v_{aus} = 0$  m/s führt zu einer Kurve mit kleinerer Amplitude. Der Muskel ist durch folgende Wahl der Parameter charakterisiert:  $P_0 = 1000$  N,  $v_{max} = 0.5$ , m/s,  $k_{SE} = 0.5 \cdot 10^5$  N/m, das Wurfobjekt durch die Masse  $m = 50$  kg.

Die linearisierte Kraft-Geschwindigkeits-Relation ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Bei dieser Relation wurde die unterschiedliche Steilheit im exzentrischen im Vergleich zum konzentrischen Bereich vernachlässigt. In der obigen Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators existieren auch keine Einschränkungen, die linearisierte Kraft-Geschwindigkeits-Relation geht von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . Bei der Übertragung dieser Lösung auf das Beispiel der Ausholbewegung müssen die physiologischen Gegebenheiten berücksichtigt werden. Für diese linearisierte Relation gibt es zwei physiologische Einschränkungen. (1) Da die Muskelkraft nicht negativ sein kann gilt: für Geschwindigkeiten, die kleiner sind als die maximale (negative) Verkürzungsgeschwindigkeit ist die Muskelkraft Null. (2) Die Muskelkraft kann nicht beliebig gross werden. Ab einer bestimmten Kraft wird der Muskel verletzt. In diesen Beispielen setzen wir diesen Wert bei  $1.5 P_0$  an.



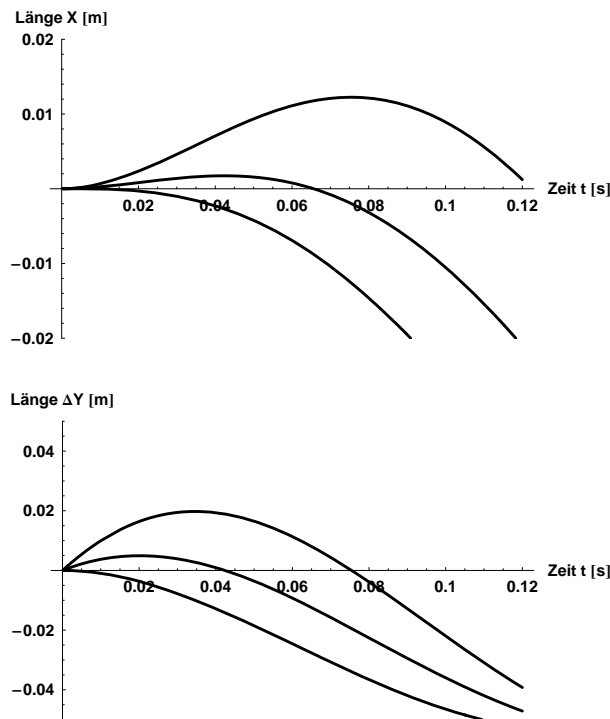


**Abbildung 4.15:** Die linearisierte Kraft-Geschwindigkeits-Relation. Da die Muskelkraft weder negative Werte annehmen kann noch beliebig gross sein kann, beschreibt die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators die Ausholbewegung, falls die physiologischen Einschränkungen erfüllt sind, d.h. die Verkürzungsgeschwindigkeit darf nicht kleiner als  $0.5 \text{ m/s}$  und die maximale Kraft darf nicht grösser als z.B.  $1.5 P_0$  sein, was einer maximalen Geschwindigkeit von  $0.25 \text{ m/s}$  entspricht.



**Abbildung 4.16:** Oben: Das Kraft-Zeit-Verhalten. Die Anfangsbedingungen sind: (a) ohne Ausholbewegung, (b) bei einer mittleren und (c) bei der maximalen Geschwindigkeit. Unten: Die dazu gehörigen Geschwindigkeits-Zeit-Verläufe ausgedrückt durch die entsprechende Höhe einer äquivalenten potentiellen Energie. Beachte: (1) Die Geschwindigkeits-Zeit-Verläufe sind korrekt solange die dazu gehörige Kraft positiv ist. (2) Durch die Ausholbewegung kann die Wurfhöhe markant verbessert werden. Die drei Wurfhöhen betragen ca.  $52 \text{ cm}$ , ca.  $59 \text{ cm}$  und ca.  $80 \text{ cm}$ .

Neben diesen zwei physiologischen Bedingungen gibt es noch eine Einschränkung wegen des Arbeitsbereiches des kontraktiven Elementes. Einfachheit halber setzten wir diesen Bereich durch  $\pm 10\%$  der Länge des kontraktiven Elementes fest. (Ein Beispiel: Bei einer Länge des kontraktiven Elementes von 5 cm beträgt der Arbeitsbereich 1 cm.) Der Muskel ist für die folgenden Diagramme durch folgende Wahl der Parameter charakterisiert:  $P_0 = 1000 \text{ N}$ ,  $v_{max} = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $k_{SE} = 0.5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ . Die Masse des Wurfobjekt beträgt  $m = 50 \text{ kg}$ .



**Abbildung 4.17:** Oben: Der zeitliche Verlauf der Länge des kontraktiven Elements  $x(t)$ . Unten: Der zeitliche Verlauf Länge des Serielementes  $\Delta y(t)$ ; In diesem Diagramm entspricht der Wert Null der Länge des Serielementes bei maximaler isometrischer Kraft.

Die analytische Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ist auch Lösung der Ausholbewegung solange die Bedingungen für die Kraft und den Arbeitsbereich eingehalten werden. Für die drei gewählten Geschwindigkeiten der Ausholbewegung sind die Kurven bezüglich der Kraft (siehe Abbildung 4.16, oberes Bild) gültig bis zu den Zeitpunkten  $\approx 85 \text{ msec}$ ,  $\approx 105 \text{ msec}$  und  $\approx 120 \text{ msec}$ , da ab diesem Zeitpunkt die Muskelkraft negativ wird. Das Verhalten ist in den Diagrammen Abbildung 4.16 und Abbildung 4.17 dargestellt. Betrachtet man den Arbeitsbereich (siehe Abbildung 4.17, oberes Bild), so stellt man fest, dass die Verkürzung des kontraktiven Elementes beim Wurf ohne Ausholbewegung grösser ist als mit Ausholbewegung. Berücksichtigt man auch diese Einschränkung, so kann man folgern, dass der Effekt der Ausholbewegung noch etwas verstärkt wird. Andererseits zeigen diese Kriterien auch auf wie komplex

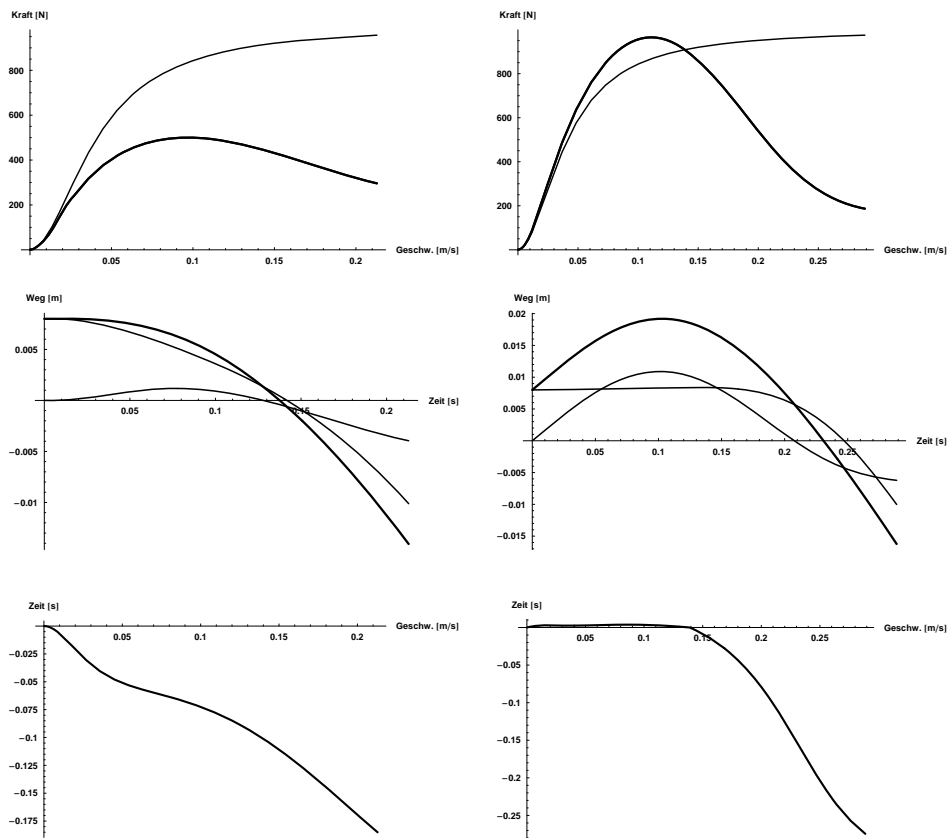
das Problem *Ausholbewegung* eigentlich ist. (Diese Diagramme werden in der Vorlesung im Detail besprochen).

Die charakteristische Lösung, die die Ausholbewegung beschreibt wie auch diese Diagramme zeigen auf, das die optimale Bewegung um eine maximale Wurfhöhe zu erreichen anderen Kriterien genügen muss, als diejenigen die Stein in seiner Arbeit aufzeigt. Die optimale Bewegung ist in diesem Beispiel gekennzeichnet durch die grösste Schnelligkeit der Ausholbewegung ohne Verletzung des Muskels. Diese Bedingung ist abhängig von der Federkonstante des Serieelementes, der Masse des Wurfkörpers und der Schnelligkeit der Ausholbewegung. Darum ist die Wurfhöhe stark abhängig von der Federkonstante des Serieelementes. Verändert sich die Federkonstante bei gleicher isometrischer Kraft z.B. durch eine Verletzung oder durch Training, so verändern sich auch die Wurfleistungen. Einige Werte für die Wurfhöhe bei verschiedenen Charakteristiken des Muskels und unterschiedlicher Masse des Wurfobjektes sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

Federkonstante $k_{SE}[N/m]$	Masse $m$ [kg]	Geschwindigkeit $v_{aus}[m/s]$	Wurfhöhe $\Delta H$ [cm]
0.5 $10^5$	25	0	96
0.5 $10^5$	25	1.6	167
0.5 $10^5$	50	0	52
0.5 $10^5$	50	1.2	80
0.5 $10^5$	100	0	30
0.5 $10^5$	100	0.8	39
1.0 $10^5$	25	0	52
1.0 $10^5$	25	1.2	80
1.0 $10^5$	50	0	30
1.0 $10^5$	50	0.8	39
1.0 $10^5$	100	0	18
1.0 $10^5$	100	0.6	21
2.0 $10^5$	25	0	30
2.0 $10^5$	25	0.8	39
2.0 $10^5$	50	0	18
2.0 $10^5$	50	0.6	21
2.0 $10^5$	100	0	13.1
2.0 $10^5$	100	0.5	13.4

**Tabelle 4.1:** Berechnete Wurfhöhen ohne Ausholbewegung und bei maximaler Ausholgeschwindigkeit bei drei unterschiedlichen Federkonstanten und drei Massen.

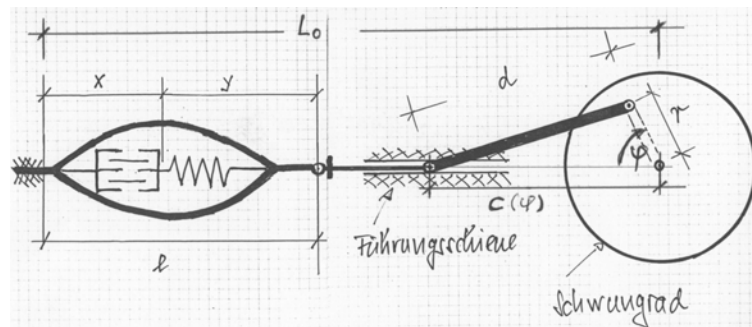
Bei diesen Betrachtungen wurden zwei Vereinfachungen vorgenommen, nämlich (1) eine lineare Kraft-Geschwindigkeits-Relation und (2) ein instantaner Sprung im Aktivitätszustand. Diese zweite Vereinfachung ist relevanter je kürzer die wesentliche Phase der Bewegung ist. Aus früheren Betrachtungen wissen wir, dass die Zeitspanne zum Aufbau des Aktivitätszustandes (siehe Abbildung 4.12) bis zu ca. 50 msec dauern kann. Diese Zeitspanne ist im Vergleich zur Wurfphase ohne Ausholbewegung gross (siehe 4.16). Dies bedeutet, dass unter Berücksichtigung eines realeren Aktivitätszustandes die Ausholbewegung effizienter ist, als in der oberen Tabelle angegeben. Diese Eigenschaft wird unten durch Simulation der Bewegungsgleichung noch einmal an einem Beispiel aufgezeigt. Folgende Parameter wurden angenommen:  $P_0 = 1000$  N,  $v_{max} = 0.6$  m/s,  $k_{SE} = 10^5$  N/m,  $m = 10$  kg. Ohne Ausholbewegung wurde eine Wurfhöhe von 1.34 m erreicht, mit einer Ausholbewegung ( $v_{aus} = 1.0$  m/s) eine Höhe von 1.79 m. Der Energieaufwand betrug 21.5 J bzw. 26.4 J.



**Abbildung 4.18:** Kraft-Zeit, Weg-Zeit und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme einer Wurfbewegung. Linke Reihe: ohne Ausholbewegung, Rechte Reihe: mit Ausholbewegung. Kraft-Zeit-Diagramm: dicke Linie = Muskelkraft, dünne Linie = Aktivitätszustand. Weg-Zeit-Diagramm: dicke Linie = Muskellänge, dünne Linie = kontraktiler bzw. Serieelement. Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm: kontraktiler Element.

## 4.5.2 Fahrrad fahren

Fahrrad fahren ist eine ideale Bewegungsform, um charakteristische Eigenschaften der Muskelmechanik aufzuzeigen. In diesem Beispiel wird das System „Muskel - Velo“ noch etwas vereinfacht. Ein „Muskel“-Motor, wie in Abbildung 4.19, linke Bildhälfte, dargestellt, und wie bereits aus dem letzten Abschnitt bekannt, ist mit dem „Veloergometer“ Abbildung 4.19, rechte Bildhälfte, direkt verbunden. Für diese Verbindung ist am Ergometer ein Pedal in einer Führungsschiene angebracht. Das Pedal ist mit einer Stange mit dem Schwungrad im Abstand  $r$  verbunden. Zieht der Muskel am Pedal, so wird ein Moment auf das Schwungrad ausgeübt. In zwei Positionen des Schwungrades - charakterisiert dadurch, dass die Verbindungsstange Pedal-Schwungrad mit der Führungsschiene des Pedals zusammenfällt - wirkt kein Drehmoment auf das Schwungrad. Diese zwei Punkte werden als Totpunkte der Bewegung bezeichnet. Diese Art der Verknüpfung hat zur Folge, dass das kontraktile Element keine konstante Verkürzungsgeschwindigkeit aufweist, auch dann nicht, wenn die Winkelgeschwindigkeit nur geringe Schwankungen zeigt.



**Abbildung 4.19:** Schematische Darstellung der Bewegung Fahrradfahren. Um die wesentlichen Charakteristiken der Bewegung Fahrradfahren zu analysieren wird ein Muskel ohne Übersetzung an einem Ergometer angeschlossen.

Die Bewegung des Schwungrades kann über eine Energiebilanz oder direkt über die Bewegungsgleichung für das Schwungrad hergeleitet werden. Der Weg über die Energiebilanz sieht wie folgt aus: Die Zugkraft auf das Pedal sei mit  $F_{Pedal}$ , die Geschwindigkeit des Pedals mit  $v_{Pedal}$ , die momentane Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades mit  $\omega$  und das Trägheitsmoment des Schwungrades sei mit  $\Theta$  bezeichnet. Ferner wird dem Schwungrad durch eine Bremse pro Zeiteinheit die kinetische Energie  $\dot{E}_{Bremse}$  entzogen. Für das Schwungrad kann damit aus der Energiebilanz eine Gleichung für die Rotation aufgeschrieben werden. Diese lautet:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2 \right\} = F_{Pedal} \cdot v_{Pedal} - \dot{E}_{Bremse} \quad (4.44)$$

oder

$$\Theta \cdot \omega \cdot \dot{\omega} = F_{Pedal} \cdot v_{Pedal} - \dot{E}_{Bremse} \quad (4.45)$$

d.h. die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Schwungrades ist gleich der mechanischen Leistung am Schwungrad minus der Bremsenergie.

Die Geschwindigkeit des Pedals  $v_{Pedal}$  ist durch die Position  $\varphi$  und durch die momentane Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegeben. Dieser Zusammenhang ist definiert durch:

$$v_{Pedal} = \dot{c}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} c(\varphi) \cdot \frac{d}{dt} \varphi = c_\varphi(\varphi) \cdot \omega \quad (4.46)$$

Und damit erhält man folgende einfache Bewegungsgleichung für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , nämlich:

$$\Theta \cdot \dot{\omega} = F_{Pedal} \cdot c_\varphi(\varphi) - \frac{\dot{E}_{Bremse}}{\omega} \quad (4.47)$$

Die Differentialgleichung kann - wie oben bereits erwähnt - auch über die Bewegungsgleichung für das Schwungrad hergeleitet werden. Diese lautet:

$$\Theta \cdot \dot{\omega} = M_{Pedal} - M_{Bremse} \quad (4.48)$$

wobei das Drehmoment der Bremse  $M_{Bremse}$  das Resultat einer einfachen Gleitreibung ( $M_{Bremse} = \mu_{Gleiten} \cdot r_{Bremse} \cdot N_{Bremse}$ ) oder das Resultat eines Windrades sein könnte, wo der Widerstand proportional zur Rotationsgeschwindigkeit im Quadrat ist. Das Drehmoment, erzeugt durch die Pedalkraft, ist wegen der Führung des Pedals nicht nur von der Pedalkraft sondern auch von der Stellung des Schwungrades abhängig. Die Winkel, und die Einheitsvektoren, die für diese Betrachtung eine Rolle spielen, sind in Abbildung 4.19 definiert. Der Einheitsvektor  $\vec{e}(\varphi)$  ist durch seine Richtung definiert

$$\vec{e}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

die Länge  $c(\varphi)$  ist durch den Cosinussatz gegeben und lautet:

$$c(\varphi) = \sqrt{d^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot d \cdot \cos(\gamma(\varphi))} \quad (4.50)$$

mit

$$\gamma(\varphi) = \pi - \varphi - \arcsin\left(\frac{r}{d} \cdot \sin(\varphi)\right) \quad (4.51)$$

Die Richtung der Stange (vom Schwungrad zum Pedal) sei mit dem Einheitsvektor  $\vec{e}_{Stange}$  bezeichnet, der Winkel zwischen der Führungsschiene und dem Einheitsvektor sei  $\alpha$ . Die Abhängigkeit dieses Vektors von der Position  $\varphi$  kann geschrieben werden als:

$$\vec{e}_{Stange}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(c(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2}} \cdot \begin{pmatrix} -c(\varphi) - r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Das Drehmoment  $M_{Schwungrad}$ , welches eine Kraft vom Betrag  $\lambda$  in Richtung der Stange  $\vec{e}_{Stange}$  auf das Schwungrad erzeugt, ist gegeben durch das Vektorprodukt (Bem.: Die  $y$ -Komponente wird bei diesen Berechnungen immer

stillschweigend unterdrückt, das Resultat, da nur eine Komponente von Null verschieden ist, wird als skalare Grösse angegeben):

$$M_{Schwungrad} = \lambda \cdot \vec{r} \times \vec{e}_{Stange} = \lambda \cdot \frac{r \cdot c(\varphi) \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{(c(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2}} \quad (4.53)$$

Damit erhält man für das Drehmoment am Schwungrad, erzeugt durch die Pedalkraft, den folgenden Form Ausdruck:

$$M_{Schwungrad} = \frac{F_{Pedal}}{\cos(\alpha(\varphi))} \cdot \frac{r \cdot c(\varphi) \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{(c(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2}} \quad (4.54)$$

mit:  $\alpha(\varphi) = \arcsin(\frac{r}{d} \cdot \sin(\varphi))$ . Da die Pedalkraft durch den Muskel erzeugt wird - hier noch ohne Übersetzung -, lautet die Bewegungsgleichung für das Schwungrad:

$$\Theta \cdot \dot{\omega} = \frac{F_{Muskel}(Z(t), l, \dot{l})}{\cos(\alpha(\varphi))} \cdot \frac{r \cdot c(\varphi) \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{(c(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2}} - M_{Bremse} \quad (4.55)$$

wobei die Muskellänge  $l$  durch die Funktion  $c(\varphi)$  gegeben ist. Es gilt:

$$l(t) = L_0 - c(\varphi) + l_{Pedal} \quad (4.56)$$

mit  $L_0$  = eine konstante Grösse (siehe Abbildung 4.19) und  $l_{Pedal}$  die Pedallänge, die im Folgenden die Länge Null haben soll.

Ohne Parallelelement ist die Muskelkraft  $F_{Muskel}(Z, l, \dot{l})$  durch das untere Gleichungssystem gegeben (siehe auch Abschnitt *Ausholbewegung*):

$$F_{Muskel}(Z, l, \dot{l}) = F_{CE}(Z, x, \dot{x}) \quad (4.57)$$

und :

$$F_{CE}(Z, x, \dot{x}) = F_{SE}(Z, y) \quad (4.58)$$

mit :

$$l = x + y = x + y_0 + \Delta y = L_0 - c(\varphi) \quad (4.59)$$

Ist der Radius  $r$  am Schwungrad so gewählt, dass der aufgezwungene Bewegungsumfang  $\Delta = c(\pi) - c(0)$  in den Plateaubereich fällt (genauer: in den Arbeitsbereich des kontraktiven Elementes), dann kann man die  $x$ -Abhängigkeit in der Kraft weglassen.

Auch in diesem Beispiel soll die Länge des kontraktiven Elementes  $x(t)$  die unabhängige Grösse für die Formulierung der Bewegungsgleichung für das „Fahrradfahren“ sein. Die Grundidee zum Herleiten der Bewegungsgleichung ist ebenfalls die Gleiche wie im letzten Beispiel und basiert auf folgende Überlegungen: Ist der Aktivitätszustand  $Z$ , die Länge des kontraktiven Elementes  $x(t)$  und deren Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  bekannt, so ist die Kraft des kontraktiven Elementes  $F_{CE}(t)$  ebenfalls bekannt. Damit ist dann auch die Länge des Serieelementes  $y(t)$  fixiert, da die beiden Kräfte gleich sein müssen  $F_{SE}(t) = F_{CE}(t)$ . Damit können wir formal schreiben  $y(t) = \Gamma_1(Z(t), x(t), \dot{x}(t))$ . Die Länge des kontraktiven Elementes  $x$  und diejenige des in Serie geschalteten Elementes  $y$  definieren

die Muskellänge  $l$  und diese ist wiederum mit der Position  $\varphi$  des Schwungrades verknüpft. Formal kann diese Beziehung wiederum geschrieben werden als  $\varphi(t) = \Gamma_2(Z(t), x(t), \dot{x}(t))$ . Im Folgenden geht es nun darum diese zwei formalen Beziehungen zu präzisieren.

Um die Formelausdrücke etwas übersichtlicher darzustellen werden folgende Abkürzungen und Vereinfachungen verwendet. Die Winkelabhängigkeit der Hebellänge beim Berechnen des Drehmoments am Schwungrad schreiben wir wie folgt:

$$\hat{r}(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \chi(\varphi) \quad (4.60)$$

mit:

$$\chi(\varphi) = \frac{1}{\cos(\alpha(\varphi))} \cdot \frac{c(\varphi)}{\sqrt{(c(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi))^2 + (r \cdot \sin(\varphi))^2}} \approx \bar{\chi} \quad (4.61)$$

Damit kann die Hebellänge durch den Ausdruck

$$\hat{r}(\varphi) \approx r \cdot \bar{\chi} \cdot \sin(\varphi) = \bar{r} \cdot \sin(\varphi) \quad (4.62)$$

annäherungsweise beschrieben werden.

Das Serieelement wird als ideale einseitige Feder mit der gleichen Abhängigkeit vom Aktivitätszustand wie im letzten Beispiel angenommen. Ebenfalls wird die Abhängigkeit der Kraft des kontraktiven Elementes von  $x$  vernachlässigt, da der Arbeitsbereich des kontraktiven Elementes auf den Plateaubereich beschränkt sein soll. Damit wird auch die Beziehung  $\Gamma_1$  zwischen der Länge des Serieelementes und die des kontraktiven Elementes einfacher. Es gilt (für Dehnungen des Serieelementes):

$$F_{CE}(Z, x, \dot{x}) \approx Z \cdot \hat{F}_{CE}(\dot{x}) = F_{SE}(Z, y) = \frac{Z}{1+Z} k_{SE} \cdot \Delta y \quad (4.63)$$

und daraus folgt:

$$\Delta y = y - y_0 = (1+Z) \frac{\hat{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \quad (4.64)$$

Damit ist die Funktion  $\Gamma_1$  gegeben. Sie lautet:

$$y = \Gamma_1(Z, x, \dot{x}) = y_0 + (1+Z) \frac{\hat{F}_{CE}(\dot{x})}{k_{SE}} \quad (4.65)$$

Für die Funktion  $c(\varphi)$  gilt folgende Relation (siehe Abbildung 4.19):

$$c(\varphi) = L_0 - (x(t) + y(t)) \quad (4.66)$$

Aus der letzten Zeile kann die Funktion  $c(\varphi)$  prinzipiell durch die Zustandsfunktion  $Z(t)$  und die Länge des kontraktiven Elementes  $x(t)$  und deren zeitliche Ableitung ausgedrückt werden. Formal kann diese Funktion durch die inverse Funktion zu  $\varphi = c^{-1}(c(\varphi))$  wie folgt geschrieben werden:

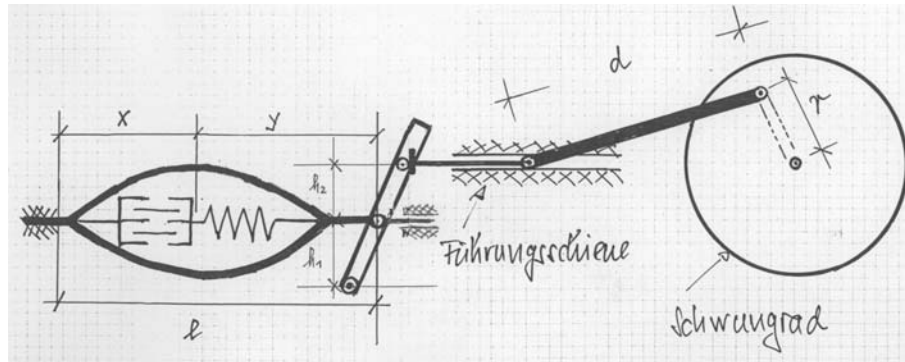
$$\varphi = \Gamma_2(Z, x, \dot{x}) = c^{-1}(L_0 - (x(t) + y(t))) \quad (4.67)$$



Damit ist auch die Funktion  $\Gamma_2$  gegeben und die Bewegungsgleichung wird zu:

$$\theta \cdot \frac{d^2}{dt^2} \Gamma_2(Z, x, \dot{x}) = Z \cdot \hat{F}_{CE}(\dot{x}) \cdot \bar{r} \cdot \sin(\Gamma_2(Z, x, \dot{x})) - M_{Bremsse} \quad (4.68)$$

Die obige Formel beschreibt - etwas vereinfacht, jedoch in allgemeiner Form - das Velofahren. Beim Sprint auf der Bahn mit einem Starrlauf spielt einerseits die Winkelbeschleunigung (vor allem beim Start) eine Rolle andererseits aber auch die Winkelgeschwindigkeit und damit die Verkürzungsgeschwindigkeit. Diese ist entscheidend für eine Spitzenleistung. Die Optimierung betrifft hier also die richtige Wahl der Übersetzung.

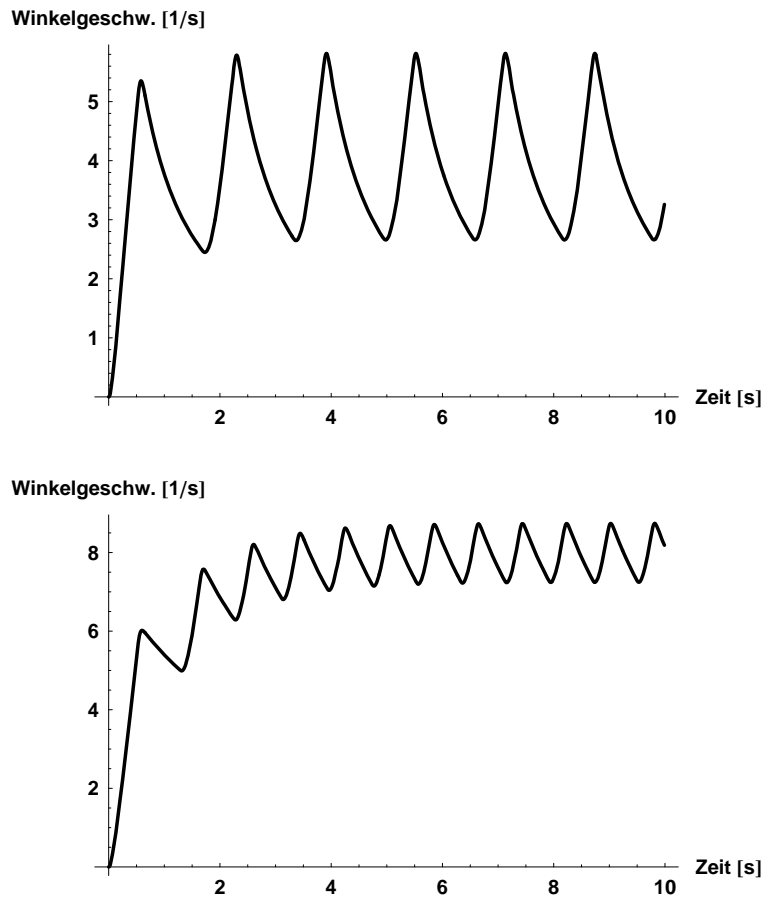


**Abbildung 4.20:** Schematische Darstellung einer einfachen Verknüpfung zwischen Muskulatur und Ergometer bei Verwendung einer Übersetzung, um die Bewegungsgleichung herzuleiten.

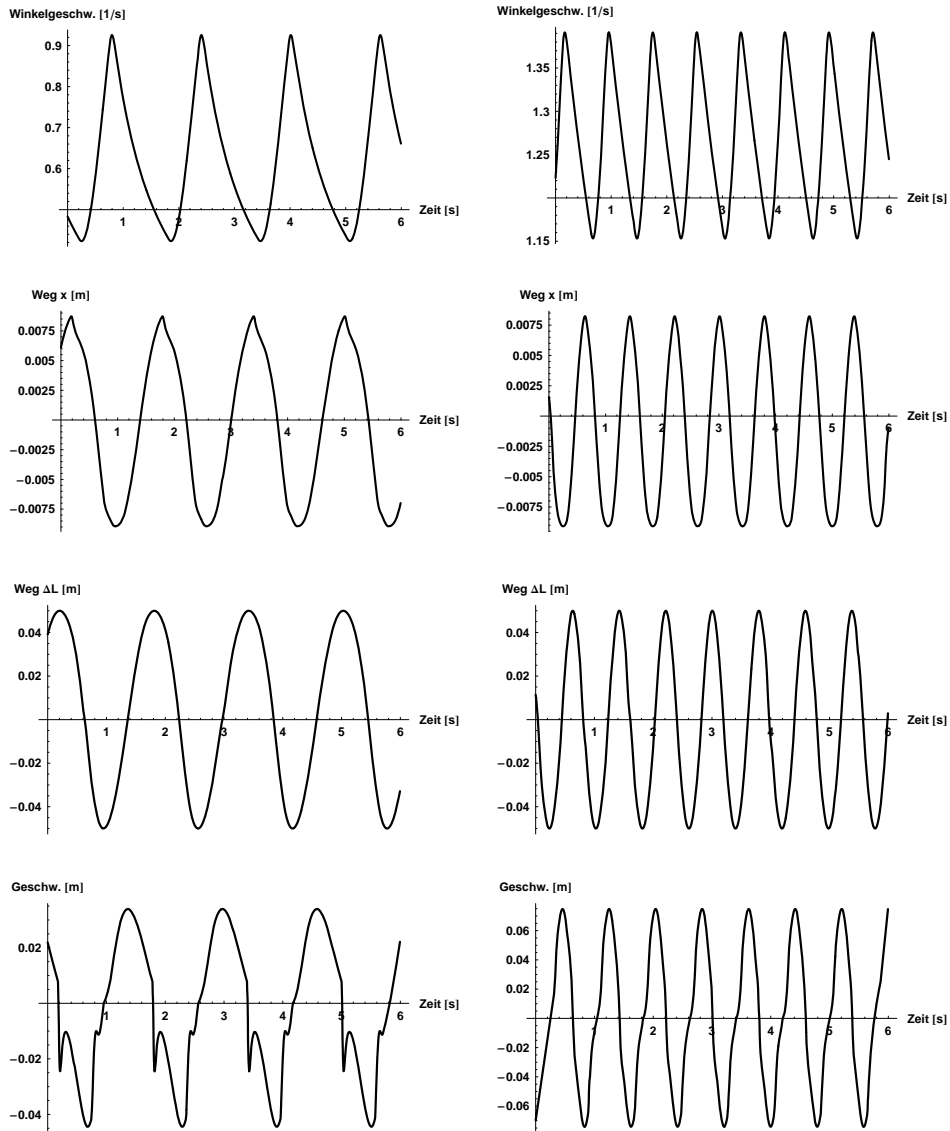
Bei einem Rennen mit mehr oder weniger konstanter Geschwindigkeit spielt die Winkelbeschleunigung eine untergeordnete Rolle. Dies führt zu einer fast konstanten Winkelgeschwindigkeit und zu einer weiteren Vereinfachung der Formeln. Aber auch diese vereinfachten Formeln sind für uns (!) zu komplex um einfache analytische Ausdrücke ableiten zu können, die die Bewegung charakterisieren. Numerische Simulationen sind notwendig, um die wichtigen Eigenschaften aufzuzeigen. Ein paar wenige Resultate sollen diese Eigenschaften charakterisieren. Folgende Parameter wurden für den Muskel angenommen:  $P_0 = 4000 \text{ N}$ ,  $v_{max} = 0.6 \text{ m/s}$ ,  $L_{max} \approx 220 \text{ W}$ ,  $v_{opt} \approx -0.2 \text{ m/s}$ ,  $R = 0.05 \text{ cm}$ ,  $d = 0.15 \text{ m}$ . Der Bremswiderstand wurde durch den Luftwiderstand eines Windrades erzeugt. Seine Charakteristik ist:  $\theta = 2 \text{ kgm}^2$ ,  $c_w = 0.4$  bzw.  $0.1$ . Der Muskel wurde kurz vor dem Erreichen des „hinteren“ Totpunktes aktiviert und dauerte bis kurz vor dem Erreichen des „vorderen“ Totpunktes.

Auch dieses Beispiel zeigt, dass, wenn wir das Velofahren sehr vereinfacht beschreiben, mathematisch gesehen sehr komplexe Formeln notwendig sind um die Verknüpfung zwischen Muskel und Ergometer richtig darzustellen. Eine mögliche Anwendung ist z.B. die Analyse der Trittfrequenz von Velofahrern beim Fahren am Berg im Vergleich zum Fahren in der Ebene. Tatsache ist, dass die meisten Sportler am Berg eine kleinere Trittfrequenz fahren im Vergleich zum Fahren in der Ebene. Betrachtet man nur die Muskulatur als kontraktiles

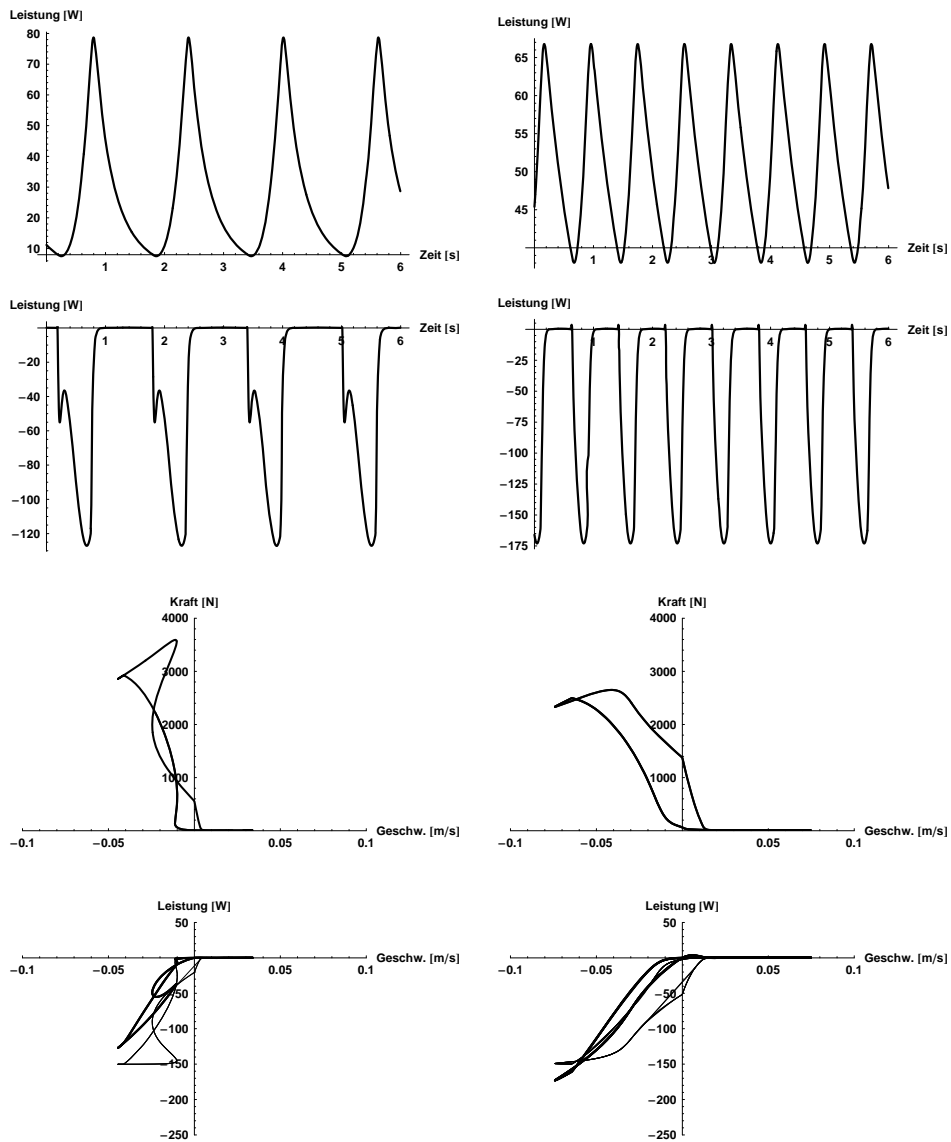
Element, dann sollten sich die Trittfrequenzen nicht unterscheiden. Eine wissenschaftliche Begründung für diese Tatsache gibt es noch nicht! (mehr dazu siehe Vorlesung).



**Abbildung 4.21:** Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramme in der Startphase beim Fahrradfahren. Oben: Grosser Luftwiderstand, unten: kleiner Luftwiderstand.



**Abbildung 4.22:** Winkelgeschwindigkeit-Zeit, Weg-Zeit (kontakt. Element), Weg-Zeit (Muskellänge) und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme des kontraktiven Elementes beim Fahrradfahren (stationäre Phase). Linke Reihe: Grosser Luftwiderstand, Rechte Reihe: kleiner Luftwiderstand.



**Abbildung 4.23:** Bremsleistung-Zeit, Antriebsleistung-Zeit, Kraft-Geschwindigkeit und Leistung-Geschwindigkeit-Relation des kontraktiven Elementes beim Fahrradfahren (stationäre Phase). Linke Reihe: Grosser Luftwiderstand, Rechte Reihe: kleiner Luftwiderstand.

## 4.6 Aufgaben

### 1. Kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene

*Gegeben:* Punkt  $A$  und Punkt  $B$  mit den Koordinaten  $x_A, y_A$  bzw.  $x_B, y_B$ .

*Gesucht:* Die kürzeste Verbindung zwischen  $A$  und  $B$ .

### 2. Minimale Oberfläche eines Rotationskörpers

*Gegeben:* Punkt  $A$  und Punkt  $B$  mit den Koordinaten  $x_A, y_A$  bzw.  $x_B, y_B$ . Erzeugen eines Rotationskörpers durch drehen der Verbindungslinie um die  $x$ -Achse.

*Gesucht:* Verbindung zwischen  $A$  und  $B$ , so dass die Oberfläche minimal ist.

*Hinweis:* Die Oberfläche, die durch die Verbindungslinie bestimmt wird, ist gegeben durch den Ausdruck:  $O = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$

### 3. Optimale Wege; Variationsrechnung

*Gegeben:* Der Weg-Zeit-Verlauf ist durch ein Polynom 4-ten Grades mit folgenden Nebenbedingungen:  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1$ ,  $v(0) = 0$  und  $v(1) = 0$  gegeben:

$$x(t) = c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + c_3 \cdot t^3 + c_4 \cdot t^4$$

*Gesucht:* (1) Bedingung für die Koeffizienten bestimmen, damit die Nebenbedingungen erfüllt sind. (2) Berechnen Sie die drei unten aufgeführten Integrale  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  mit  $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ,  $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$  und  $jerk(t) = \frac{d}{dt}a(t)$ :

$$I_1(\tilde{c}_1) = \int_0^1 v(\tau) \cdot a(\tau) d\tau$$

$$I_2(\tilde{c}_1) = \int_0^1 (a(\tau))^2 d\tau$$

$$I_3(\tilde{c}_1) = \int_0^1 (jerk(\tau))^2 d\tau$$

(3) Welcher Wert des Koeffizienten bzw. welche Kombination der Koeffizienten macht das jeweilige Integral minimal? und (4) Berechnen Sie die zu den optimierten Weg-Zeit-Verläufen gehörende Arbeit.

### 4. Bewegungsablauf mit minimaler Arbeit; Variationsrechnung

*Gegeben:* Ein lineares mechanisches System bestehend aus einem Massenpunkt, einer Feder und einem Dämpfer, welches durch eine äussere Kraft angetrieben wird. Der Massenpunkt wird in einer fixen Zeit von  $A$  nach  $B$  bewegt. Siehe Beschreibung auf Seite 131 unten / 132 oben der Arbeit von Stein.

*Gesucht:* Der Bewegungsablauf mit minimaler Arbeit, insbesondere (1) Optimierungsaufgabe mathematisch formulieren, (2) Die zu lösende Gleichung bzw. Differentialgleichung aufschreiben (Euler), (3) Gleichung lösen bzw. Gleichung vereinfachen und dann lösen und (4) das Resultat

graphisch darstellen und mit den entsprechenden Graphiken im Artikel vergleichen.

#### 5. **Bsp. aus Artikel von Stein; Variationsrechnung**

*Gegeben:* Ein lineares mechanisches System bestehend aus einem Massenpunkt, einer Feder und einem Dämpfer, welches durch eine äussere Kraft angetrieben wird. Der Massenpunkt wird in einer fixen Zeit von A nach B bewegt. Siehe Beschreibung auf Seite 131 unten / 132 oben der Arbeit von Stein.

*Gesucht:* Der Bewegungsablauf falls (a) das Integral über die Beschleunigung im Quadrat und (b) das Integral über den *Ruck* im Quadrat minimal sein soll. Insbesondere soll man (1) Optimierungsaufgabe mathematisch formulieren, (2) Die zu lösende Gleichung bzw. Differentialgleichung aufschreiben (Euler), (3) Gleichung lösen bzw. Gleichung vereinfachen und lösen und das Integral berechnen und (4) das Resultat graphisch darstellen und mit den Graphiken im Artikel vergleichen.