

Biomechanik II:

Biologische und mechanische Grundlagen des Bewegungsapparates

Unterlagen zur Vorlesung Biomechanik II,
Teil aktiver Bewegungsapparat
SS 05

Grobinhalte:

Der Bewegungsapparat als mechanisches System
Der Muskel als Motor
Grundsätze der Belastungsanalyse
Optimierung von Bewegungen
Plastizität der Muskulatur

J. Denoth

Laboratorium für Biomechanik, D-MATL
ETH-Hönggerberg, HCI E 357.1
CH-8093 Zürich
Phone: +41 1 633 62 16, E-Mail: jdenoth@ethz.ch

Stand: Juli 05

Zur Vorlesung und zum Skript

Y. C. Fung (1993) definiert die Biomechanik als „Mechanics applied to Biology“. Nach Fung’s Definition, stellt die Biomechanik die Biologie in den Vordergrund, wobei die Fragestellungen wie auch das Vorgehen bei der Analyse auf mechanischen Prinzipien basieren. Im Vorlesungszyklus *Biomechanik I und II des Studienganges Bewegungswissenschaften und Sport (BWS)* ist *Biomechanik* nach Fung’s Definition zu verstehen, wobei die Biologie hauptsächlich auf den menschlichen Bewegungsapparat beschränkt ist.

Dieser Ansatz wird bereits in **Kapitel 1** zum Ausdruck gebracht. In diesem Kapitel wird der menschliche Bewegungsapparat vereinfacht und als mechanisches System beschrieben. Die Bausteine für diese Approximation bilden die Begriffe *Chassis* (= passiver Bewegungsapparat), *Motor* (= Muskulatur), *Steuerung* (= Nervensystem und Sinne) und *Versorgung* (= Atmung und Blutkreislauf) mit ihren zugehörigen Funktionen in Anlehnung z.B. an ein Automobil oder einen Roboter. Die ersten zwei Komponenten stellen diejenigen Komponenten dar, die genauer analysiert werden. Wird das Chassis durch nicht deformierbare Körper beschrieben, so entsteht, wie am Beispiel des Roboters, eine kinematische Kette mit mehreren Freiheitsgraden. Die Bewegungsgleichungen solcher Ketten werden am besten mit dem Lagrange Formalismus beschrieben, da dadurch Zwangskräfte automatisch berücksichtigt werden können.

Im **Kapitel 2** wird der Muskel analysiert und beschrieben. Aus mechanischer Sicht stellt der Muskel ein *einseitiger* Kraftgenerator dar. Fragen nach verschiedenen Kennlinien wie der Kraft-Längen-Relation, der Kraft-Geschwindigkeits-, der Leistungs-Geschwindigkeits- und der Wärme-Geschwindigkeits-Relation werden behandelt. Um die Eigenschaften dieses komplexen biologischen Motors besser verstehen zu können, wird auch der Aufbau und die Steuerung kurz gestreift sowie die Prinzipien der Gleitfilamenttheorie von Huxley beschrieben und diskutiert.

Kapitel 3: Das System *menschlicher Bewegungsapparat* ist komplex. Daher ist es schwierig, die Belastung und Beanspruchung einzelner Körperteile während einer Tätigkeit ohne chirurgische Eingriffe zu bestimmen. Eine Belastungsanalyse macht eine solche Bestimmung möglich unter bestimmten Voraussetzungen. In diesem Kapitel werden die grundsätzlichen Problem der Belastungsanalyse diskutiert. Am Beispiel der Bewegung *Gehen* wird am Fuss- und Kniegelenk eine solche Analyse angewendet.

Kapitel 4: Wenn der Ingenieur eine Maschine oder eine Apparatur entwickelt, versucht er das System auf die Zielvorgabe hin zu optimieren. Gibt es Optimierungskriterien für die menschliche Bewegung? Diese Frage wird in diesem Kapitel angegangen. Stein zeigt in seiner Arbeit *What is Optimized in Muscular Movements?*, dass *einfache* Bewegungen möglichst ruckfrei sind. Diese Eigenschaft ist im Weiteren eng verknüpft mit einem minimalen Energieverbrauch.

Im Unterschied zu Werkstoffen wie Titan, Eisen, Aluminium, Polyethylene - um nur einige zu nennen - ist biologisches Material ein lebendes Material, welches sich prinzipiell aktiv an Beanspruchungen anpassen kann. Einige grundlegende Eigenschaften werden im **Kapitel 5** diskutiert. Diese Unterlagen beschränken sich hauptsächlich auf die Plastizität der Muskulatur. Im Zusammenhang mit der Plastizität wird am Beispiel des Skelettbaus die Dimensionierung als Folge der Evolution kurz gestreift. Die Dimensionierung der Tiere unterschiedlicher Grösse aber gleicher Gattung folgt nicht der geometrischen Ähnlichkeit - ein anderes Gesetz bestimmt das Wachstum und damit die Dimensionierung des Körperbaus. Andererseits beeinflusst die Grösse eines Objektes das physikalische Verhalten.

Das Ziel dieser Vorlesung ist es, den Studentinnen und Studenten, die wesentlichen Grundlagen aus biologischer und mechanischer Sicht näher zu bringen und sie zu befähigen, diese Aspekte richtig einzuordnen, deren Bedeutung für den Alltag zu kennen und bei konkreten Fragestellungen den richtigen Ansatz zu finden, um das gestellte Problem aus „biomechanischer“ Sicht anzugehen.

Diese Unterlagen sollen den Studentinnen und Studenten das wenig sinnvolle¹ und viel Zeit erfordernde Abschreiben des dargebotenen Stoffes von der Wandtafel und von den Projektionen weitgehend ersparen. Sie stellen aber nicht einen vollständigen Text dar, welcher alle Erklärungen explizit enthält. Da die verschiedenen Bereiche, die in dieser Vorlesung diskutiert werden, ein stetes Forschungsfeld sind (vor allem die Plastizität), wird die Vorlesung durch aktuelle Publikationen ergänzt. Das Skript ist aber insofern vollständig, als dass an der Prüfung keine Fragen gestellt werden, welche Kenntnisse voraussetzen, die über den Rahmen dieses Textes hinausgehen.

Das Skript stellt eine überarbeitete und erweiterte Fassung früherer Unterlagen dar. Druckfehler jener Unterlagen sind z.T. eliminiert worden, neue Druckfehler sind in dieser Fassung sehr wahrscheinlich, da meine Deutschkenntnisse - als Engadiner mit romanischer Muttersprache - nicht perfekt sind. Daher kann keinerlei Gewähr für ein fehlerfreies Skript übernommen werden. Ich bin dankbar für jede Kritik und jeden Hinweis auf Fehler oder unverständliche Formulierungen.

Hönggerberg, 30.3.2005 / JD

¹Oder wäre es doch sinnvoll bestimmte Bereiche zu kopieren um die wesentlichen Punkte besser *memorisieren* zu können? Solche Fragen beantwortet die Lerntheorie und nicht die Biomechanik.

Inhaltsverzeichnis

Zur Vorlesung und zum Skript	iii
1 Der Bewegungsapparat als mechanisches System	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Zerlegung des menschlichen Bewegungsapparates nach dem Ansatz: „Chassis - Motor - Steuerung - Versorgung“	3
1.3 Die kinematische Kette	6
1.3.1 Die Bewegungsgleichung einer einfachen, planaren zweigliedrigen kinematischen Kette	9
1.4 Das Modell der effektiven Masse, ein Instrument zur Interpretation von Kraftspitzen	16
1.5 Berücksichtigung der Weichteile: Das Schwabbelmassen - Modell	19
1.6 Regelung der Motoren – eine aktive kinematische Kette	21
1.7 Bemerkungen zu den Gelenken	24
1.8 Anhang 1: Der Newton'sche und Lagrange'sche Formalismus in der Mechanik	26
1.8.1 Wo liegen die Schwierigkeiten bei der Lösung mechanischer Probleme?	26
1.8.2 Begriffe und Formalismen in der Mechanik	27
1.8.3 Formalismen	29
1.8.4 Anwendungen der Lagrange'schen Formulierung	31
1.8.5 Zusammenfassung, Kochbuchrezepte	31
1.9 Anhang 2: Mechanik deformierbarer fester Körper (Elastomechanik)	32
1.9.1 Mechanische Eigenschaften der Materialien und Körper des passiven Bewegungsapparates	34
1.9.2 Spezielle Materialeigenschaften	35
1.10 Aufgaben	37

2	Der Muskel als Motor	43
2.1	Einleitung	43
2.2	Kurzer geschichtlicher Rückblick zur Muskulatur	44
2.3	Aufbau, Typisierung und Steuerung des Muskels	47
2.3.1	Aufbau	47
2.3.2	Fasertypen	49
2.3.3	Die Steuerung (Regulation) der Muskelkontraktion	51
2.3.4	Die motorische Einheit	52
2.4	Experimentelle Resultate	55
2.4.1	Kraft, Geschwindigkeit und Wärme: Hill's Experimente	55
2.4.2	Die Hill'schen Relationen zwischen Kraft, Wärme und Geschwindigkeit	57
2.4.3	Weitere experimentelle Ergebnisse, die den biologischen Motor charakterisieren	62
2.5	Theoretische Beschreibung des biologischen Motors	66
2.5.1	Eine theoretische Beschreibung der Hill'schen Erkenntnisse für eine Faser	66
2.5.2	Eine theoretische Beschreibung für eine motorische Einheit	67
2.5.3	Folgerungen für die Muskelkraft aus der Konstruktion und der Regelung eines Muskels und der Hill'schen Beschreibung einer Faser	68
2.5.4	Zusammenfassung	72
2.6	Die Gleitfilament-Theorie von Huxley (1957)	74
2.6.1	Die Struktur der Myofibrille (Kenntnisstand um 1955)	74
2.6.2	Die Gleitfilament-Theorie	75
2.6.3	Folgerungen aus der Gleitfilament-Theorie	79
2.6.4	Mathematische Formulierung der Gleitfilamenttheorie	80
2.6.5	Schlussbemerkungen	84
2.7	Aufgaben	88
3	Belastungsanalyse	93
3.1	Einleitung	93
3.2	Grundproblematik der Belastungsanalyse	94
3.2.1	Das muskuläre Drehmoment	96
3.2.2	Lemmas der Belastungsanalyse	98
3.2.3	Lösungsansätze	99
3.2.4	Optimierungsverfahren, Optimierungsmethoden	101

3.3	Bewegungsanalyse	111
3.3.1	Einleitung	111
3.3.2	Beispiel <i>Gehen</i>	115
3.3.3	Informationen aus Energie- und Impulssätze	119
3.4	Bestimmung der Belastung im Fuss- und Kniegelenk beim Gehen	123
3.4.1	Einleitung	123
3.4.2	Praktische Umsetzung	124
3.4.3	Anthropometrie / Anthropometrische Daten	125
3.4.4	Belastungen im Bereich des OSG	125
3.4.5	Belastungen im Bereich des Kniegelenkes	128
3.5	Aufgaben	130
4	Bewegungsoptimierung aus theoretischer Sicht	131
4.1	Einleitung, Fragestellungen und Zielsetzungen	131
4.2	Zusammenfassung: Eigenschaften des kontraktiles Elementes . .	132
4.3	What is Optimized?	135
4.3.1	Einleitung	135
4.3.2	Zusammenfassung der Arbeit von R. B. Stein	135
4.3.3	Exkurs: Variationsrechnung	149
4.4	Optimierung der Bewegung zur Maximierung mechanischer Grö- sen wie Impuls und Leistung	149
4.4.1	Einleitung und Zielsetzung	149
4.4.2	Beschreibung des Motors „Muskel“	150
4.5	Beispiele	158
4.5.1	Die Ausholbewegung	158
4.5.2	Fahrrad fahren	167
4.6	Aufgaben	175
5	Plastizität der Muskulatur	177
5.1	Einleitung und Definition des Begriffes	177
5.2	Bereiche der Plastizität aus mechanischer Sicht - Versuch einer systematischen Ordnung	182
5.3	Interventionen - klassische Versuche	186
5.3.1	Anpassungen auf makroskopischer Ebene	186
5.3.2	Anpassungen auf zellulärer (mikroskopischer) Ebene . . .	187
5.4	Scale effects oder Ähnlichkeitsbetrachtungen. Was sagt uns die Evolution?	201

5.4.1	Einleitung und Definition des Begriffes	201
5.4.2	Beispiele aus der Physik	202
5.4.3	Theoretische Ähnlichkeiten	203
5.4.4	Einfluss der Evolution auf die Dimensionierung des Körperbaus - Resultate	208
5.5	Einige Literaturangaben zur Plastizität (noch unvollständig) . . .	211
5.6	Aufgaben	214

Kapitel 1

Der Bewegungsapparat als mechanisches System

1.1 Einleitung

Der Mensch ist ein komplexes biologisches System. Um das physikalische Verhalten dieses Systems *Mensch* oder von Subsystemen zu verstehen, muss es zuerst als ein einfaches mit physikalischen Gesetzen beschreibbares Modell formuliert werden. Dieser Vorgang erlaubt dann, unter Anwendung der mathematischen Sprache das Modell zu beschreiben und so vielleicht das allgemeine Verhalten des Systems zu verstehen. Bei der Vereinfachung eines biologischen Systems zu einem physikalisch beschreibbaren Modell spielt die Fragestellung eine entscheidende Rolle.

Ein Ziel der Bewegungswissenschaft ist es, Bewegungen zu verstehen. Verstehen bedeutet in diesem Zusammenhang, eine Bewegung aus mechanischer Sicht zu deuten und mit Begriffen und Argumenten aus der Mechanik zu interpretieren. Dies da die Mechanik die Wissenschaft ist, die den Zusammenhang zwischen Bewegungen von Körpern und den einwirkenden Kräften untersucht. In dieser Vorlesung wird die Mechanik *im Grossen* behandelt. Unter Mechanik *im Grossen* versteht man z.B. die Fingerbewegungen eines Klavierspielers, die mechanische Leistung eines Radfahrers, die Beanspruchung des Kniegelenkes bei der natürlichen Bewegung *Gehen*. Das Ziel dieses Abschnittes ist es also, das System *menschlicher Bewegungsapparat* aus mechanischer Sicht zu beschreiben. Damit ist es möglich, die zu untersuchende Bewegung – innerhalb des Modells – quantitativ zu analysieren. Auch Fragen nach ökonomischen oder optimalen Bewegungsabläufen können untersucht und verglichen werden. Aber auch die Belastung und Belastbarkeit einzelner Körperteile können berechnet und die möglichen Auswirkungen dieser Belastungen auf das biologische Material diskutiert werden.

Unser Bewegungsapparat ist das Produkt einer jahrtausendelangen Evolution. Die Evolution ist ein langsamer Prozess; der momentane Ausbildungsgrad des Bewegungsapparates ist daher das Resultat früherer Umgebungsbedingun-

gen und Tätigkeiten des Menschen. Die Umweltbedingungen unterlagen in den letzten 50 Jahren grossen Veränderungen; durch die Automatisierung der Arbeitsabläufe werden andere Anforderungen an den Menschen gestellt. Die Motorisierung und das *Fernseh-* und *Bürozeitalter* beanspruchen den Bewegungsapparat viel weniger als zu früheren Zeiten. Daher wird der Bewegungsapparat – nach dem Wolff’schen Gesetz – weniger belastbar, da er weniger beansprucht wird. Sport und Fitnessprogramme sollen für einen Ausgleich sorgen. Ohne spezifische Kenntnisse vom Zusammenspiel *Bewegung und Belastung* können bei verschiedenen Tätigkeiten (auch im Sport) zu grosse Beanspruchungen entstehen. Als Folge von Überbeanspruchung können dann Beschwerden auftreten.

Als Strategie für die Vereinfachung des Bewegungsapparates zu einem sinnvollen Modell folgen wir den Ideen der Ingenieure bei der Entwicklung von Robotern (siehe Abbildung 1.1) oder von Fortbewegungsmitteln wie Auto und Motorrad. Dieser Ansatz ist nicht unproblematisch, denn der Ingenieur entwickelt und baut ein System, welches spezifische Anforderungen erfüllen muss. Wir wählen einen pragmatischen Ingenieurweg, wobei der Bewegungsapparat – für die in diesem Vorlesungszyklus gestellten Fragen – nach dem Schema *Chassis-Motor-Steuerung-Versorgung* in seine Komponenten aufgeteilt wird. Damit soll später unsere natürliche Fortbewegungsart *Gehen* und *Laufen* analysiert werden, um die Belastung und die Beanspruchung der einzelnen Körperteile zu bestimmen.

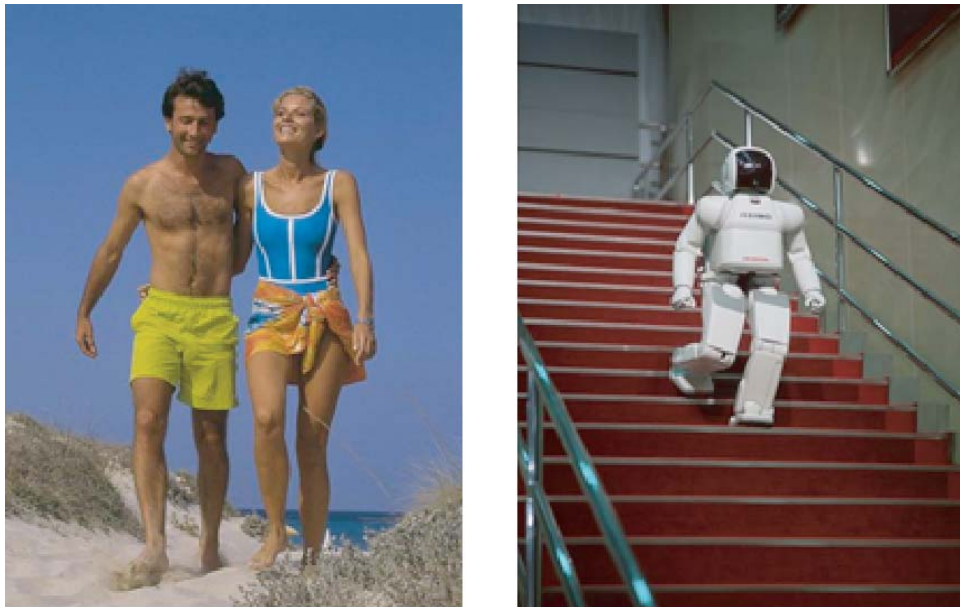


Abbildung 1.1: Links: Zwei Verliebte am Strand beim Gehen (aus dem Internet). Rechts: Der Roboter ASIMO von Honda. Eine ganze Gruppe dieser Roboter-Familie traten bei der Eröffnung der Weltausstellung 2005 in Japan auf, als Musikanten und als Tänzer. Diese zwei Bilder sollen den Ausgangspunkt und das mögliche Resultat der Vereinfachungen illustrieren, die notwendig sind wenn man den menschlichen Körper zu einem mechanischen System „degradieren“ will. Verschiedene, nicht unbedeutende Eigenschaften gehen bei diesem Prozess verloren.

1.2 Zerlegung des menschlichen Bewegungsapparates nach dem Ansatz: „Chassis - Motor - Steuerung - Versorgung“

Einzelne Körpersegmente wie z.B. Oberkörper, Oberschenkel, Unterschenkel oder Fuss erscheinen aus der Distanz betrachtet annähernd als starre Körper, bedingt durch deren Konstruktion und Zusammensetzung mit knöchernen Strukturen (siehe Abbildung 1.2). In verschiedenen Situationen wird diese starke Vereinfachung zu starren Teilkörpern genügen, jedoch ist sie sicherlich nicht die korrekte Abstraktion für alle Situationen im Alltag. Dieses Gerüst, geformt durch die knöchernen Strukturen, bildet das Chassis. Die wesentlichen Komponenten werden dabei durch die Knochen und die Gelenke gebildet. Der Antrieb wird durch die Muskulatur erzeugt. Die Steuerung und Regelung der Motoren wird durch das Zentrale Nervensystem (= ZNS) sichergestellt. Diese Komponenten des Systems, sowie die Versorgung der Motoren mit Brennstoff sind im Zusammenhang mit Fragen der Belastung und Beanspruchung des Bewegungsapparates nicht zentral und werden deshalb hier nicht weiter verfolgt. Diese Komponenten sind jedoch von entscheidender Bedeutung, wenn es z.B. darum geht, Bewegungen zu optimieren, damit die Leistung maximal wird. Diese Fragen werden weiter unten angegangen.

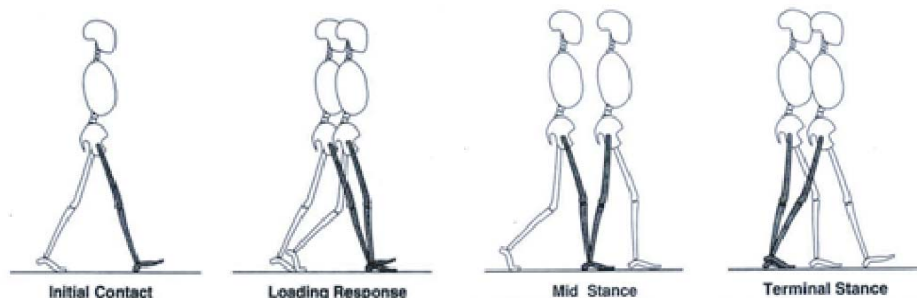


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der Bewegung *Gehen*. Das dunkel markierte Bein ist Gegenstand der Modellierung und der Analyse. Die einzelnen Phasen der Bewegung sind: die Aufsetz-, die Belastungs-, die Stand- und die Entlastungsphase.

Die oben aufgeführte Vereinfachung führt zu einer möglichen Zuordnung der verschiedenen Komponenten. Beispiele dafür sind: *Knochen und Gelenke* \mapsto *Chassis*; *Muskulatur* \mapsto *Motoren*; *Knochen, Knorpel, Sehnen, Gelenke und Muskulatur* \mapsto *Stossdämpfer*; *Sehnen* \mapsto *Getriebe, nur eine fixe Übersetzung!*. Der Vorgang der Vereinfachung ist nicht trivial, und auch nicht eindeutig. Die Vereinfachung muss – damit sie sinnvoll ist – so sein, dass die für die Fragestellung relevanten Komponenten möglichst der Realität entsprechend abgebildet werden.

Für diesen ersten Schritt der Modellierung nehmen wir an, dass die Bewegung *Gehen*, wie sie in Abbildung 1.2 schematisch dargestellt ist, mit dem Schwerpunkt *untere Extremitäten* analysiert und quantifiziert werden soll. Bei

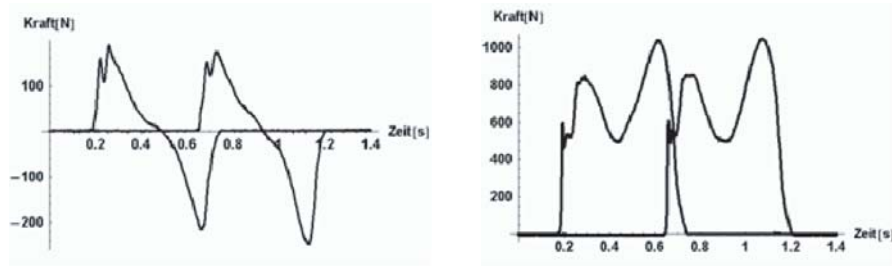


Abbildung 1.3: Typischer Verlauf der Bodenreaktionskraft bei der Bewegung *Gehen*. Rechts: vertikale Richtung, Schritt links + rechts. Links: Kraft entgegen der Gehrichtung, Schritt links + rechts. Beachte: Während der Belastungsphase wirkt die Bodenreaktionskraft als Bremse, während der Entlastungsphase als Antrieb.

dieser Bewegungsform treten typische Bodenreaktionskräfte auf, die die Belastung der der Kette mitbestimmen. Diese Reaktionskräfte sind in Abbildung 1.3 dargestellt.

Für diejenigen Situationen, für die eine triviale Vereinfachung genügt, wird das Gebilde Beine, Rumpf und Arme (oder ein Teil davon) zu einer so genannten kinematischen Kette zusammengefasst. Eine kinematische Kette ist ein Gebilde aus starren Körpern, die über Gelenke miteinander verbunden sind. Die Gelenke verbinden die einzelnen Körper miteinander und reduzieren die Bewegungsfreiheit der einzelnen starren Körper; komplexere Bewegungen der einzelnen Körper sind die Folge. Die Gelenke stellen Bedingungen an die Bewegungsfreiheit der einzelnen Körper. Solche Bedingungen nennt man Zwangsbedingungen, die dazugehörigen Kräfte Zwangskräfte.

Die Bewegung der einzelnen Körper wie Oberschenkel, Unterschenkel, oder Fuss können in zwei Phasen unterteilt werden, nämlich in eine Kontaktphase und eine Schwungphase. Die erstere kann in weitere einzelne Bewegungsphasen wie Aufsetzphase, Belastungs-, Stand- und Abstossphase, die typische Eigenschaften aufweisen, unterteilt werden (siehe auch Abbildung 1.3). Diese sehr einfache Charakterisierung der einzelnen Phasen führt dann – fast automatisch – zu weiteren Fragen des mechanischen Verhaltens des Systems in diesen Zeitabschnitten. Die hier vorgenommene Phaseneinteilung kann praktisch auf alle alltäglichen Bewegungen von Mensch und Tier verallgemeinert werden.

- **Schwungphase, Eigenschaft(en):** Kleine Willküraktivität, Fragen: Ist die Bewegung z.B. von Ober- und Unterschenkel vergleichbar mit einer Pendelbewegung? Wenn ja, ist dann die Bewegung vergleichbar mit derjenigen eines Einfach- oder Doppelpendels?
- **Aufsetzphase, Eigenschaft(en):** Sehr dynamisch, Fragen: Ist die Bewegung z.B. des Fusses vergleichbar mit einer Aufprall-Situation? Wenn ja, wie soll der Aufprall beschrieben werden? Kann der Aufprall des Fusses (als Teil einer kinematischen Kette) verglichen werden mit dem Aufprall eines Massenpunktes auf eine harte Unterlage?

- **Abstossphase, Eigenschaft(en):** Grosse Willküraktivität, eher quasi-statische Bewegung, ... Fragen: Welche Muskelkräfte (oder Kombinationen davon) führen zur gleichen Bewegung? Welche Kombination ist ökonomischer?

In den nächsten Abschnitten wird ein sehr vereinfachtes Abbild des Bewegungsapparates physikalisch beschrieben. Bei der Interpretation des Verhaltens solch einfacher Modelle ist es immer wieder wichtig zu wissen, welche Teile komplett vernachlässigt worden sind. Am Beispiel der unteren Extremitäten wird dies hier stichwortartig aufgezeigt ohne Begründung oder weitere Erklärungen. Im Verlaufe dieser Vorlesungsreihe wird der eine oder andere Punkt genauer analysiert.

Die Kernstruktur des Chassis bilden die Knochen, die härtesten Komponenten der einzelnen Segmente. Folgende Knochen sind hier zu erwähnen: Femur, Tibia, Fibula, Calcaneus, Talus und die Mittelfussknochen. Diese harten Strukturen werden zu drei bis vier starren Glieder einer Kette zusammengefasst.

Die Masse z.B. des Oberschenkels beträgt ca. 10% der Masse des ganzen Körpers (siehe Abbildung 1.8). Diese Masse beinhaltet die Masse des Femurs sowie die ganze Muskel- und Fettmasse, die im Oberschenkelbereich liegt.

Gelenke sind komplexe Strukturen aus Bändern, Knorpel und Kapselgewebe. Folgende Gelenke sind Bestandteil einer viergliedrigen kinematischen Kette *untere Extremitäten*: das Hüftgelenk, das Kniegelenk und das obere Sprunggelenk.

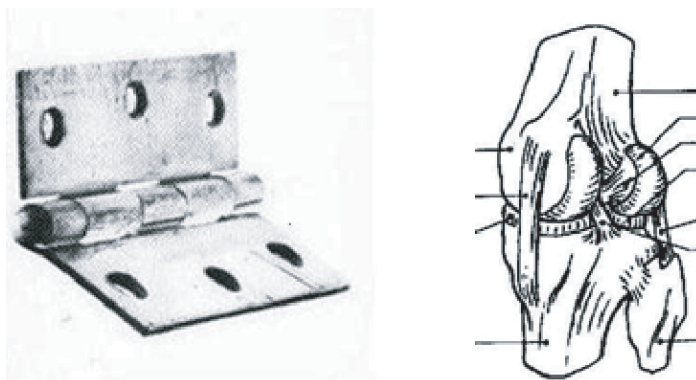


Abbildung 1.4: Li: Scharniergelenk mit einer definierten Drehachse; Re: Schematische Zeichnung eines realen Kniegelenkes. Die momentane Drehachse ist abhängig von der Belastungssituation.

Diese biologischen Gelenke sind viel komplexer als z.B. ein einfaches Scharniergelenk (siehe Abbildung 1.4). Die momentane Drehachse in biologischen Gelenken ist gegeben durch die Abroll- bzw. Gleitflächen, durch die äusseren Kräfte, die auf die Körperteile einwirken und durch die inneren Kräfte wie z.B. Zugspannung der Bänder und der Muskulatur. Mehr dazu siehe Abschnitt *Bemerkung zu den Gelenken*.

Muskeln können nur *ziehen* und nicht *stossen*! Daher existieren pro Gelenk immer eine agonistische und eine antagonistisch Muskelgruppe. Nach Lanz & Wachsmuth (ein altes Anatomiebuch aus dem Jahre 1935, S. 353, 354, 260, 261) findet man für den Hüftbereich 11 Muskeln für die Beugung und 14 Muskeln für die Streckung, im Kniegelenk 7 Muskeln für die Beugung und 5 Muskeln für die Streckung und im oberen Sprunggelenk 7 Muskeln für die Plantarflexion und 4 Muskeln für Dorsalflexion. Ein Ingenieur hätte pro Freiheitsgrad eines Gelenkes nur ein Muskelpaar angebracht. Diese Vielfalt an Kraft-Generatoren ist in Abbildung 1.5 dargestellt.

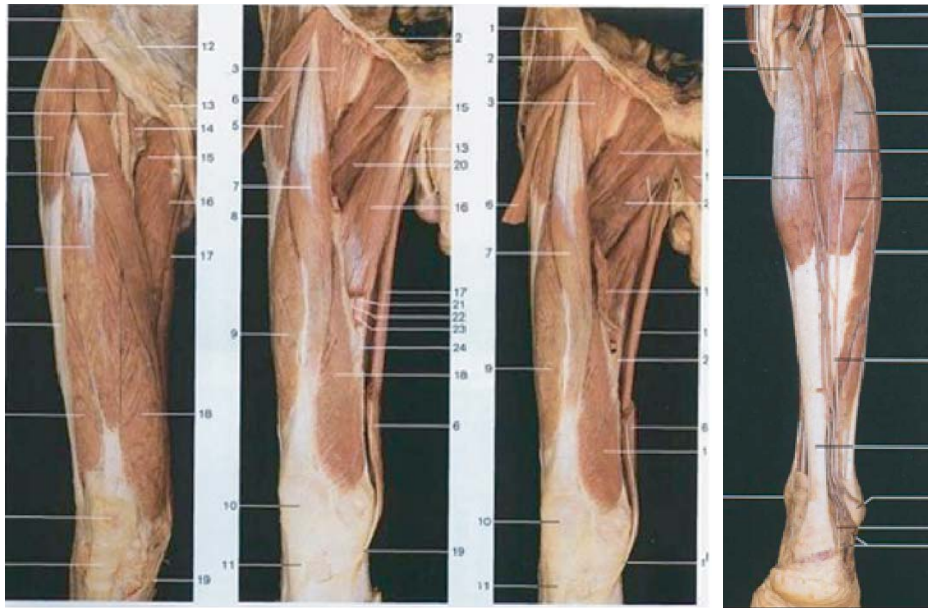


Abbildung 1.5: Vielfalt an Muskeln im Bereich der unteren Extremitäten. Quellenangabe: Rohen, J. et al. Anatomie des Menschen, Fotografischer Atlas der systematischen und topografischen Anatomie, 2002.

1.3 Die kinematische Kette

Eine kinematische Kette ist ein System aus starren Körpern, die über Gelenke miteinander verbunden sind (siehe Abbildung 1.6). Für unsere Betrachtungen vereinfachen wir diesen Begriff wie folgt:

n starre Körper, die über $(n-1)$ Gelenke so miteinander verbunden sind, dass:

- die *n* Körper eine Kette ohne Verzweigungen bilden,
- alle *n* Körper bewegen sich nur in ein und derselben Ebene,
- die Gelenke sind als reibungsfreie Scharniergelenke ausgebildet

formen eine einfache, planare, n-gliedrige kinematische Kette.

Da in dieser Vorlesung keine komplexeren kinematischen Ketten wie z.B. linke und rechte Extremitäten über die Hüfte verknüpft betrachtet werden, wird

deshalb ohne weitere Angaben unter einer n-gliedrigen kinematischen Kette in der Regel eine einfache, planare, n-gliedrige kinematische Kette verstanden.

In Abbildung 1.6 ist das linke bzw. das rechte Bein durch eine 4-gliedrige Kette beschrieben mit den starren Körpern: Vorfuss, Mittelfuss, Unterschenkel (US) und Oberschenkel (OS). Der dargestellte Bewegungsablauf ist eine Folge der durch die Muskulatur und die Bänder (evtl. auch Kapseln) erzeugten Drehmomente um die entsprechenden Gelenksachsen. Durch eine Verknüpfung der einzelnen starren Körper ist die Bahn eines Punktes (in Abbildung 1.6: Achse des Kniegelenkes bzw. des Hüftgelenkes) eine komplexe Funktion der bodennahen Segmente. Die durch die Muskulatur erzeugten und geregelten aktiven Drehmomente werden weiter unten eingeführt. Die durch Bänder und evtl. Gelenkkapsel erzeugten passiven Momente werden vorläufig vernachlässigt. Hier geht es zuerst um das Verständnis der Bewegung von kinematischen Ketten.

Jeder starre Körper in einer kinematischen Kette ist durch seine Masse m , sein Trägheitsmoment I_{KSP} bezüglich dem Schwerpunkt des Körpers (=KSP) senkrecht zur Bewegungsebene, sowie der Lage der Gelenksachse bzw. der Gelenksachsen bezüglich dem KSP gegeben. In Abbildung 1.7 und Abbildung 1.8 sind gemittelte Daten für die Länge einzelner Segmente, deren Masse und die Lage des KSP im Segment aufgeführt.

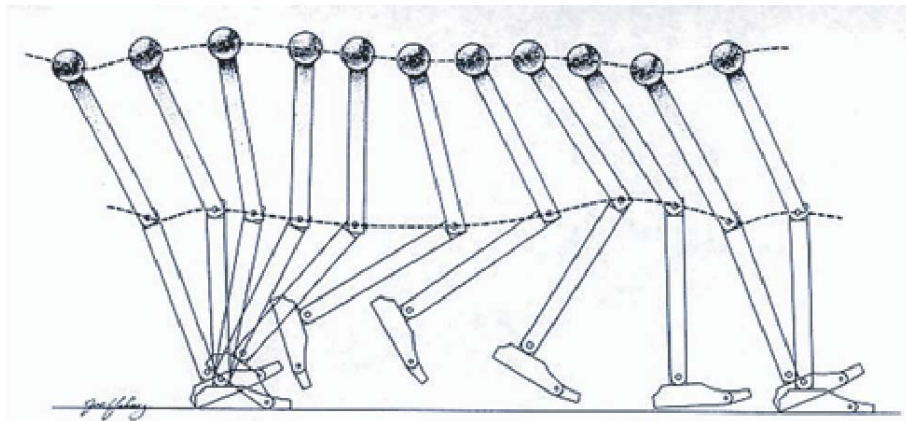


Abbildung 1.6: Schematisches Bild der (linken bzw. rechten) unteren Extremitäten beim Gehen dargestellt als 4-gliedrige kinematische Kette bestehend aus OS, US, Mittel- und Vorfuss.

Ein Beispiel:

Gegeben: Eine Person, die 70 kg (= M) schwer und 180 cm (= H) gross ist.

Gesucht: Länge, Masse und Trägheitsmoment von Unter- und Oberschenkel.

Die Länge des Unterschenkels l_{US} berechnet sich aufgrund der unteren Angaben zu $l_{US} = (0.285 - 0.039) \times 180 \text{ cm} = 44.3 \text{ cm}$, die des Oberschenkels l_{OS} zu $l_{OS} = (0.530 - 0.285) \times 180 \text{ cm} = 44.1 \text{ cm}$.

Die Masse des Unterschenkels m_{US} berechnet sich zu $m_{US} = 0.0465 \times 70 \text{ kg} = 3.255 \text{ kg}$, die des Oberschenkels m_{OS} zu $m_{OS} = 0.100 \times 70 \text{ kg} = 7.0 \text{ kg}$.

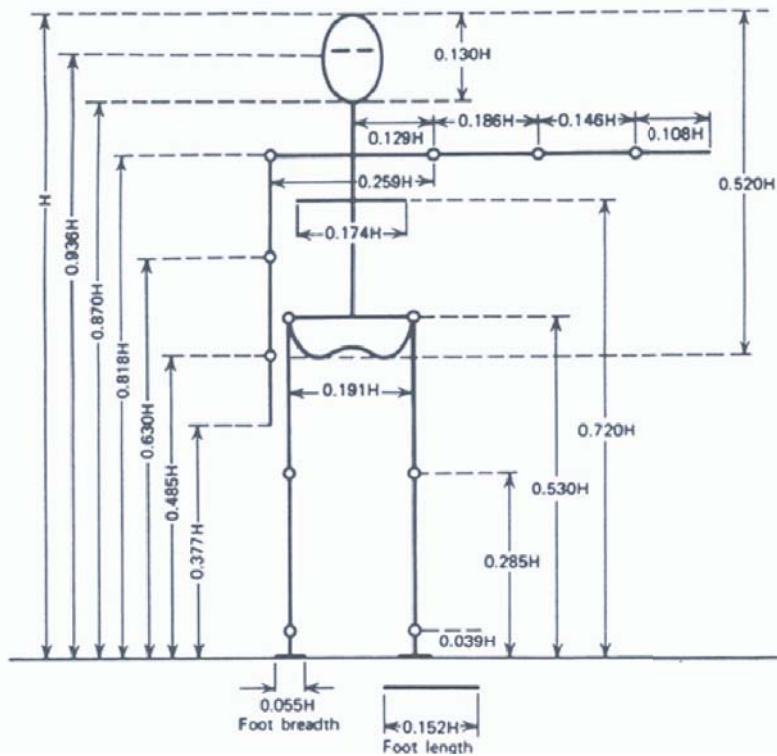


Abbildung 1.7: Anthropometrische Daten des Bewegungsapparates. Angegeben sind die Längen einzelner Segmente im Verhältnis zur Körpergröße H.

Anthropometric Data

SEGMENT	DEFINITION	SEG WEIGHT/ TOT BODY WT	CENTER OF MASS/ SEGMENT LENGTH	
			PROX	DIST
Hand	Wrist Axis/Knuckle II Middle Finger	.006 M	.506	.494 P
Forearm	Elbow Axis/Ulnar Styloid	.016 M	.430	.570 P
Upper Arm	Glenohumeral Axis/Elbow Axis	.028 M	.436	.564 P
Forearm & Hand	Elbow Axis/Ulnar Styloid	.022 M	.682	.318 P
Total Arm	Glenohumeral Joint/Ulnar Styloid	.050 M	.530	.470 P
Foot	Lateral Malleolus/Head Metatarsal II	.0145 M	.50	.50 P
Shank	Femoral Condyles/Medial Malleolus	.0465 M	.433	.567 P
Thigh	Greater Trochanter/Femoral Condyles	.100 M	.433	.567 P
Foot & Shank	Femoral Condyles/Medial Malleolus	.061 M	.606	.394 P
Total Leg	Greater Trochanter/Medial Malleolus	.161 M	.447	.553 P

Abbildung 1.8: Anthropometrische Daten des Bewegungsapparates. Angegeben sind die Massen einzelner Segmente im Verhältnis zur Gesamtmasse M sowie die Lage des Körperschwerpunktes des Segmentes bezüglich der Endpunkte. (Aus D. A. Winter, Biomechanics of Human Movement, John Wiley & Sons, New York, 1979).

Für die zwei Trägheitsmomente I_{US} , I_{OS} um den KSP (Beachte: Index KSP hier weggelassen) wählen wir hier eine Vereinfachung; die Trägheitsmomente von Unter- und Oberschenkel werden mit Hilfe des Trägheitsmomentes eines Zylinders mit Radius r und Länge l angenähert:

$$I_{Zylinder} = m \left(\frac{r^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \right) \quad (1.1)$$

Das Trägheitsmoment des Unterschenkels errechnet sich mit obiger Formel zu ca. $I_{US} = 0.061 \text{ kgm}^2$ dasjenige des Oberschenkels zu ca. $I_{OS} = 0.16 \text{ kgm}^2$.

1.3.1 Die Bewegungsgleichung einer einfachen, planaren zweigliedrigen kinematischen Kette

Ein starrer Körper hat im dreidimensionalen Raum sechs Freiheitsgrade; drei der Translation (z.B. des KSP) und drei der Rotation. Ist die Bewegungsfreiheit des Körpers auf planare Bewegungen eingeschränkt – was bei unseren kinematischen Ketten der Fall ist – so reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei: Zwei für die Translation (z.B. des KSP) und einen Freiheitsgrad für die Rotation. Die planare Ebene wird als die x - z -Ebene angenommen. Der Ortsvektor zum KSP wird mit \vec{r}_{KSP} , die Stellung oder die Orientierung des Körpers (z.B. beschrieben durch den KSP und einer weiteren Markierung A bezüglich der x -Achse) wird mit dem Winkel ϕ bezeichnet (siehe Abbildung 1.9).

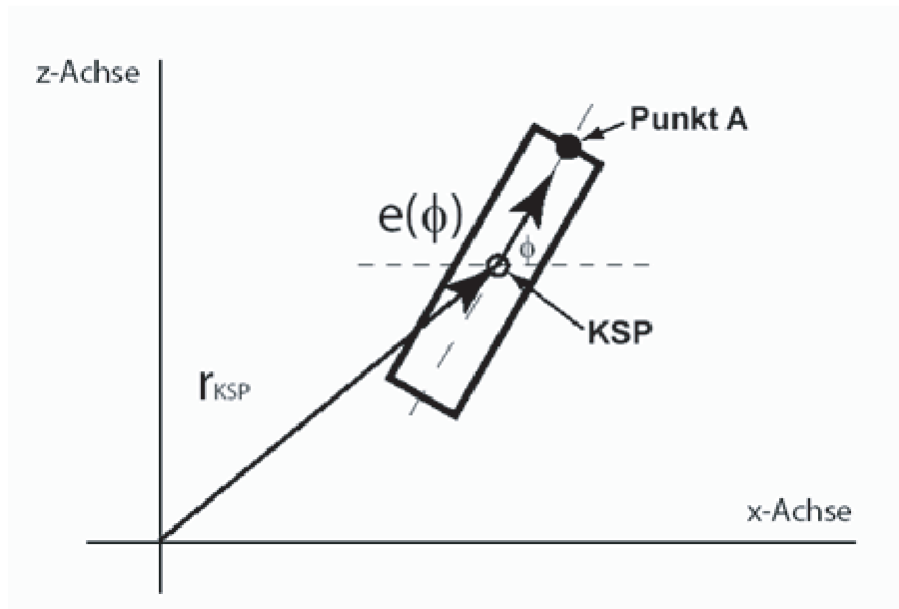


Abbildung 1.9: : Definition der zwei Variablen \vec{r}_{KSP} und ϕ (bzw. $\vec{e}(\phi)$), die die Lage des KSP und die Stellung des Körpers beschreiben. ϕ wird im Gegenuhreigersinn gemessen.

Der Winkel ϕ wird im Gegenuhrzeigersinn gemessen. (Beachte: Das Minuszeichen bei der zweiten Gleichung 1.4 ist eine Folge dieser Festlegung).

Der in Abbildung 1.9 eingezeichnete Einheitsvektor $\vec{e}(\phi)$ nimmt in Komponenten im 3-dim. Raum folgende einfache Form an:

$$\vec{e}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ 0 \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Die Bewegungsgleichung eines starren Körpers lautet (in Worten):

*Masse mal Beschleunigung = Summe der Kräfte, die am Körper angreifen
und
Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung = Summe der Drehmomente
bezüglich dem Körperschwerpunkt, die am Körper angreifen*

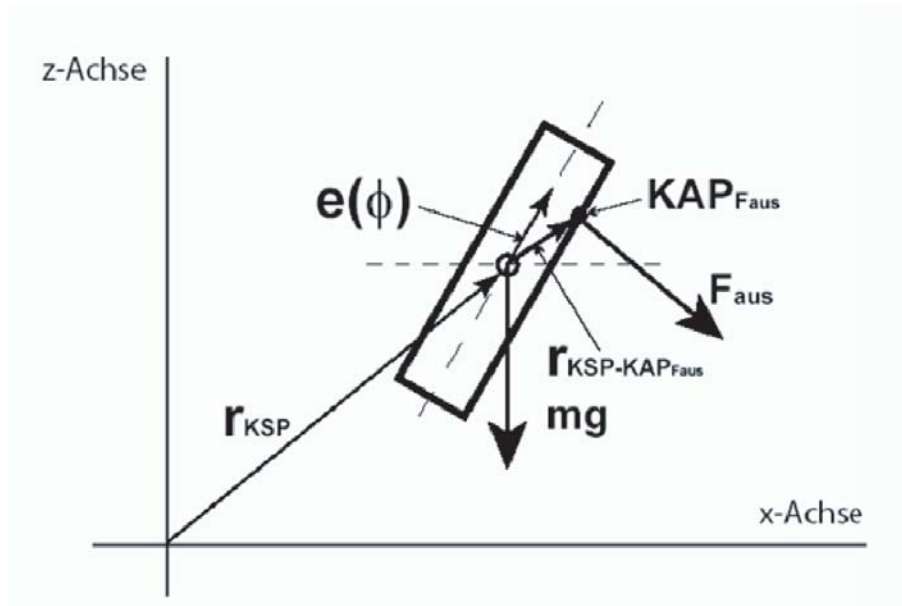


Abbildung 1.10: Illustration der Kräfte und des Kraftangriffspunktes (=KAP), die am starren Körper angreifen. In diesem Beispiel ist die Schwerkraft mg und NUR eine äussere Kraft F_{aus} eingezeichnet. Der Kraftangriffspunkt (KAP) der Schwerkraft ist der Körperschwerpunkt (KSP), der der äusseren Kraft ist hier mit $KAP_{F_{aus}}$ bezeichnet. Für die Rotation des Körpers ist das Drehmoment, welches die äussere Kraft bezüglich des Körperschwerpunktes erzeugt von Bedeutung.

In Formeln ausgedrückt lauten diese Gleichungen (siehe Abbildung 1.10):

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_{KSP} = \sum \vec{F}_{aus_i} \quad (1.3)$$

$$I_{KSP} \cdot \ddot{\varphi} = - \sum M_i \quad (1.4)$$

mit

$$M_i = \left(\vec{r}_{KSP-KAP_{F_i}} \times \vec{F}_{aus_i} \right)_{2.Komponente}$$

Bemerkung 1: Die Kräfte, die am Körper angreifen sind Vektoren, die Drehmomente nur skalare Grössen, da wir nur planare Bewegungen betrachten.

Bemerkung 2: Das Minuszeichen ist eine Folge der obigen Definitionen. Das Drehmoment der äusseren Kraft übt auf den Körper eine Drehung nach rechts aus und der Winkel ϕ wird kleiner!

Bemerkung 3: Die skalare Grösse M_i , die in Gleichung 1.4 vorkommt, ist dabei nichts anderes als die y-Komponente des Vektors! Das Vektorprodukt vereinfacht sich stark, wenn die zwei Vektoren in derselben Ebene liegen.

Der Vektor $\vec{r}_{KSP-KAP_{F_i}}$ beschreibt den Vektor vom KSP zum Kraftangriffspunkt der Kraft F_i . Dieser Vektor kann durch den Einheitsvektor $\vec{e}(\phi)$ wie folgt beschrieben werden:

$$\vec{r}_{KSP-KAP_{F_i}} = l_i \cdot \vec{e}(\psi) \quad (1.5)$$

mit l_i = Distanz vom KSP zum KAP der Kraft F_i und ψ = Winkel zwischen der Strecke KSP-KAP und der x-Achse. Dieser Winkel kann dann zerlegt werden in den Winkel $\phi(t)$ und einen zeitunabhängigen (festen) Winkel $\delta = \psi(t) - \phi(t)$.

Aus Gleichung 1.3 und 1.4 ergeben sich sofort die Gleichgewichtsbedingungen (= GGB) für starre Körper bei planaren Bewegungen.

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{0} \Rightarrow \sum_j \vec{F}_j(t) = \vec{0} \quad (1.6)$$

und

$$I \cdot \ddot{\phi}(t) = 0 \Rightarrow \sum_j M_j(t) = 0 \quad (1.7)$$

Diese Gleichungen 1.6 und 1.7 gelten auch für das quasistatische Gleichgewicht, da die Trägheitskräfte per definitionem viel kleiner sind als die angreifenden Kräfte. Die Gleichungen für das quasistatische Gleichgewicht lauten:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) \approx \vec{0} \Rightarrow \sum_j \vec{F}_j(t) \approx \vec{0} \quad (1.8)$$

und

$$I \cdot \ddot{\phi}(t) \approx 0 \Rightarrow \sum_j M_j(t) \approx 0 \quad (1.9)$$

Die Bewegungsgleichung der zwei-gliedrigen Kette (siehe Abbildung 1.11) kann aus diesen Gleichungen *aufgebaut* werden. Dieses Vorgehen soll anhand eines möglichst einfachen Beispiels illustriert werden. Die erste Annahme betrifft die Geometrie der Segmente: die zwei Körper sollen unendlich dünn sein, d.h. für das unteren Segment gilt dann z.B., dass der Kraftangriffspunkt der äusseren

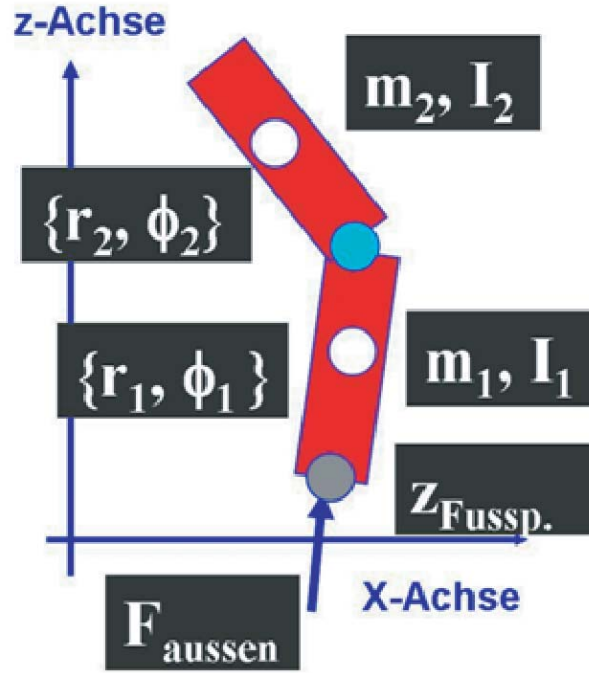


Abbildung 1.11: Schematisches Bild der zweigliedrigen kinematischen Kette. \vec{r}_1 und ϕ_1 sind die Koordinaten des ersten Körpers, \vec{r}_2 und ϕ_2 diejenigen des zweiten Körpers. Der KAP der äusseren Kraft ist hier mit der Koordinate des Fusspunktes bezeichnet.

Kraft, der KSP und die Gelenksachse auf einer Gerade liegen! Die zweite Annahme betrifft die äusseren Kräfte: als äussere Kräfte sollen nur die Schwerkraft und eine Kontaktkraft wirksam sein. Die Kontaktkraft soll verschieden von null sein, falls der *Fusspunkt* Bodenkontakt hat. Ohne Bodenkontakt ist die Kontaktkraft gleich null. Als innere Kraft tritt nur die Zwangskraft in Erscheinung. Einmal wirkt die Zwangskraft von Körper 1 auf Körper 2: $\vec{Z}_{1 \rightarrow 2}$. Als Reaktion, eine Folge des Axioms *actio = reactio* wirkt aber auch eine Kraft von Körper 2 auf Körper 1: $\vec{Z}_{2 \rightarrow 1}$. Diese (zwei) Zwangskräfte sind entgegengerichtet, gleich gross und a priori unbekannt. Mit diesen Zwangskräften – vorläufig als unbekannte Grössen – kann die Bewegungsgleichung für beide Körper aufgeschrieben werden. Diese lautet für Körper 1 wie folgt:

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -m_1 \cdot \vec{g} + \vec{Z}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{aussen} \quad (1.10)$$

$$-I_1 \ddot{\phi}_1 = l_{Z_{2 \rightarrow 1}} \cdot \vec{e}(\phi_{Z_{2 \rightarrow 1}}) \times \vec{Z}_{2 \rightarrow 1} + l_{F_{aussen}} \cdot \vec{e}(\phi_{F_{aussen}}) \times \vec{F}_{aussen} \quad (1.11)$$

bzw. für Körper 2:

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -m_2 \cdot \vec{g} + \vec{Z}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.12)$$

$$-I_2 \ddot{\phi}_2 = l_{Z_{1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{e}(\phi_{Z_{1 \rightarrow 2}}) \times \vec{Z}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.13)$$

Das Scharniergelenk, welches die zwei Körper miteinander verbindet, ist eine Zwangsbedingung und bedeutet, dass der Ortsvektor \vec{r}_2 wie folgt geschrieben werden kann:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + a_1 \cdot \vec{e}(\phi_1) + b_2 \cdot \vec{e}(\phi_2) \quad (1.14)$$

mit: $a_i =$ Länge KSP_{*i*} - Gelenksachse proximale Seite und $b_i =$ Länge KSP_{*i*} - Gelenksachse distale Seite, also: $a_i + b_i = l_i$.

Ist ferner die Kontaktkraft, die äussere Kraft als Funktion des Kontaktpunkts *Fusspunkt* bekannt z.B. $\vec{F}_{aussen} = \vec{f}(z_{Fusspunkt}, \dot{z}_{Fusspunkt}, \dot{x}_{Fusspunkt})$, so beschreiben die Gleichungen (1.10) bis (1.14) den Aufprall der 2-gliedrigen Kette. Diese Gleichungen bilden ein nicht lineares Differentialgleichungssystem; die Lösungen können nicht in einer analytischen Form niedergeschrieben werden. Wir müssen uns auf numerische Lösungen beschränken.

Umformen der Gleichungen (1.10) bis (1.13):

1. Schritt: Addition Gleichung (1.10) und Gleichung (1.12) ergibt:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -(m_1 + m_2) \cdot \vec{g} + \vec{F}_{aussen}(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \phi_1, \dot{\phi}_1) \quad (1.15)$$

2. Schritt: Ersetzen der Zwangskräfte in Gleichung (1.11) und (1.13) durch die Gleichung (1.10) und (1.12). :

$$-I_1 \ddot{\phi}_1 = l_{Z_{2 \rightarrow 1}} \cdot \vec{e}(\phi_{Z_{2 \rightarrow 1}}) \times (m_1(\ddot{\vec{r}}_1 + \vec{g}) - \vec{F}_{aussen}) + l_{F_{aussen}} \cdot \vec{e}(\phi_{F_{aussen}}) \times \vec{F}_{aussen} \quad (1.16)$$

$$-I_2 \ddot{\phi}_2 = l_{Z_{1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{e}(\phi_{Z_{1 \rightarrow 2}}) \times m_2(\ddot{\vec{r}}_2 + \vec{g}) \quad (1.17)$$

Mit der obigen Definition der Winkel und den distalen bzw. proximalen Längen der einzelnen Segmente vereinfachen sich die obigen Ausdrücke sehr stark. Diese zwei Gleichungen lauten nach der Substitution:

$$-I_1 \ddot{\phi}_1 = a_1 \cdot \vec{e}(\phi_1) \times (m_1(\ddot{\vec{r}}_1 + \vec{g}) - \vec{F}_{aussen}) - b_1 \cdot \vec{e}(\phi_1) \times \vec{F}_{aussen} \quad (1.18)$$

$$-I_2 \ddot{\phi}_2 = -b_2 \cdot \vec{e}(\phi_2) \times m_2(\ddot{\vec{r}}_2 + \vec{g}) \quad (1.19)$$

3. Schritt: Ersetzen von $\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2, \ddot{\vec{r}}_2$ durch \vec{r}_1 und ϕ_1 und deren zeitliche Ableitungen. Die erste zeitliche Ableitung von:

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) + a_1 \cdot \vec{e}(\phi_1(t)) + b_2 \cdot \vec{e}(\phi_2(t)) \quad (1.20)$$

wird zu:

$$\dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{\vec{r}}_1(t) + a_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_1} \vec{e}(\phi_1(t)) \cdot \dot{\phi}_1(t) + b_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_2} \vec{e}(\phi_2(t)) \cdot \dot{\phi}_2(t) \quad (1.21)$$

oder mit: $\vec{n}(\phi) \equiv \vec{e}'(\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}(\phi)$.

$$\dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{\vec{r}}_1(t) + a_1 \cdot \vec{n}(\phi_1(t)) \cdot \dot{\phi}_1(t) + b_2 \cdot \vec{n}(\phi_2(t)) \cdot \dot{\phi}_2(t) \quad (1.22)$$

und mit der Eigenschaft der zweiten zeitliche Ableitung des Einheitsvektors:
 $\vec{e}(\phi) = -\frac{\partial}{\partial \phi} \vec{n}(\phi)$

wird die zweite zeitliche Ableitung des Vektors \vec{r}_2 zu:

$$\ddot{\vec{r}}_2(t) = \ddot{\vec{r}}_1(t) + a_1 \left(-\vec{e}(\phi_1) \dot{\phi}_1^2 + \vec{n}(\phi_1) \cdot \ddot{\phi}_1(t) \right) + b_2 \left(-\vec{e}(\phi_2) \dot{\phi}_2^2 + \vec{n}(\phi_2) \cdot \ddot{\phi}_2(t) \right) \quad (1.23)$$

Damit erhält man ein nicht lineares Differentialgleichungssystem für die Variablen \vec{r}_1 , ϕ_1 und ϕ_2 . In einigen Situationen ist es (vielleicht) von Vorteil, die Koordinate des KSP des ersten Körpers \vec{r}_1 durch die Koordinate des Punktes *Fusspunkt* zu beschreiben. Diese Substitution lautet:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{Fusspunkt} + b_1 \cdot \vec{e}(\phi_1) \quad (1.24)$$

Die Kontaktkraft, die Kraft, die zwischen Boden und erstem Körper wirkt, ist in vertikaler Richtung durch die Deformationskraft des Bodens (bzw. der Unterlage) bestimmt. Die Haft- und Gleitreibungskräfte beschreiben die x-Komponente der äusseren Kraft. Für die folgenden einfachen Betrachtungen und Simulationen wählen wir die Form:

$$\vec{F}_{aussen} = \begin{pmatrix} F_{Haft-/Gleitreibung} \\ 0 \\ F_{Deformation} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

mit den Komponenten:

$$F_{Deformation} = \begin{cases} 0 & , falls \quad z_{Fusspunkt} \geq 0 \\ -k \cdot z_{Fusspunkt} & , falls \quad z_{Fusspunkt} < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

und

$$F_{Haft-/Gleitreibung} \equiv 0$$

Die obigen Formeln mit den Substitutionen sowie die Formeln für die Bodenreaktionskraft liefern das nicht lineare Differentialgleichungssystem für den Aufprall einer zweigliedrigen Kette auf eine Unterlage. Wir werden – wie oben schon angedeutet – dieses Gleichungssystem hier theoretisch nicht weiter behandeln. Einfache Simulationen sollen zuerst das Aufprallverhalten eines starren Körpers kurz beschreiben.

In Abbildung 1.12 ist die Deformationskraft, die ein Massenpunkt beim Aufprall auf eine Unterlage erzeugt in Funktion der Zeit dargestellt. Der Boden ist bei diesen einfachen Berechnungen durch eine ideale Feder ersetzt worden. Variiert wurde die Masse bei gleicher Aufprallhöhe (Masse: 2, 4, 6, 8 und 10 kg, Aufprallhöhe = 5 cm, Federkonstante des Bodens = 200000 Nm⁻¹). Je grösser

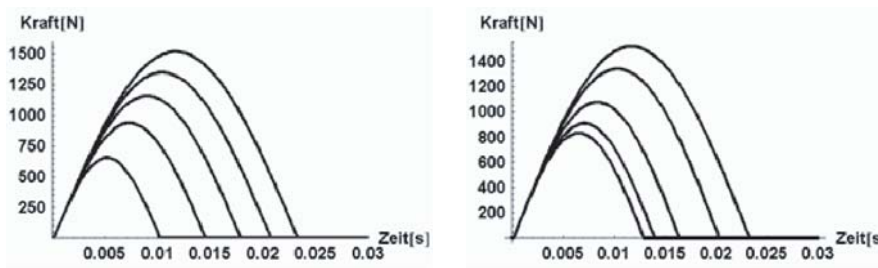


Abbildung 1.12: : Aufprallkraft-Zeit-Verläufe von 5 unterschiedlich schweren Massenpunkten (li) bzw. (eines starren Körpers bei 5 unterschiedlichen Stellungen (10° , 30° , 50° , 70° und 90° gegenüber der Horizontale) zum Zeitpunkt des Kontaktes (re) aus gleicher Höhe.

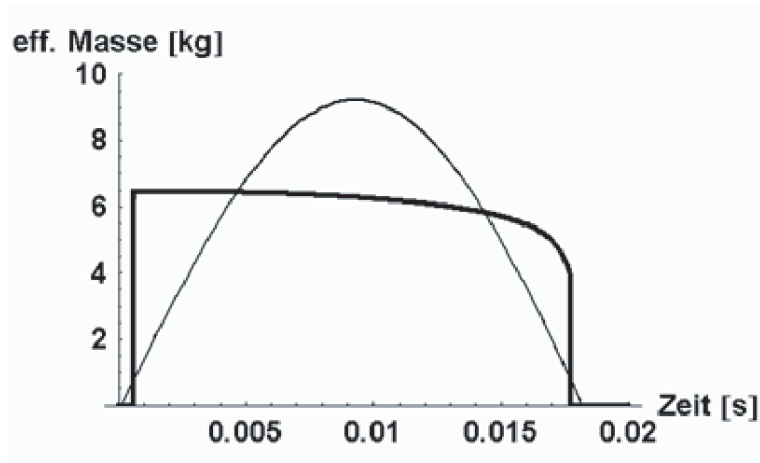


Abbildung 1.13: Die effektive Masse (Definition siehe Text) in Abhängigkeit von der Zeit während des Kontakts (dicke Linie) beim Aufprall eines starren Körpers auf den Boden. Die Stellung des starren Körpers beim ersten Kontakt beträgt 60 Grad gegenüber der x-Achse. Die Masse des starren Körpers beträgt 10 kg, das Trägheitsmoment 0.22 kgm^2 bei einer Länge des Stabes von 0.44 m. Die dünne Linie stellt die Aufprallkraft in Funktion von der Zeit dar.

die Masse des Massenpunktes, desto grösser ist auch die Aufprallkraft und die Kontaktzeit.

Der Aufprall eines starren Körpers auf eine ideale Feder wird in den Übungen behandelt. Zwei Resultate sind hier kurz zusammengefasst. In Abbildung 1.12 rechtes Bild ist die Aufprallkraft in Abhängigkeit von der Stellung des starren Körpers dargestellt (10° , 30° , 50° , 70° und 90° ; Masse = 10 kg, Trägheitsmoment = 0.22 kgm^2 , und einer Länge von 0.44 m). Je *steiler* die Position des Körpers, desto grösser ist die Bodenreaktionskraft, da der KSP weniger ausweichen kann. Die *effektive* Masse, die der Boden während der Aufprallphase *spürt* ist in Abbildung 1.13 für eine Anfangsposition von 60° dargestellt. Sie ist definiert als:

$$m^*(t) = \frac{F_{Boden}(t)}{\ddot{z}_{Fusspunkt}(t) + g} \quad (1.27)$$

Diese effektive Masse verändert sich in der ersten Hälfte der Kontaktzeit relativ schwach, weshalb diese Grösse auch als Mass genommen werden kann, um die Kraftspitzen bei Aufprallsituationen abzuschätzen. Dieses Verhalten wird im nächsten Abschnitt auf eine kinematische Kette angewendet und analysiert.

1.4 Das Modell der effektiven Masse, ein Instrument zur Interpretation von Kraftspitzen

Die Bodenreaktionskraft, die beim Aufsetzen des Fusses auf dem Boden erzeugt wird, zeigt die Charakteristik eines (eher harten) Aufpralles; d.h. die Kraft wirkt nur während einer kurzen Zeit und weist eine grosse Spitze auf (siehe Abbildung 1.14). Die Aufprallzeit liegt in der Grössenordnung von 20–40

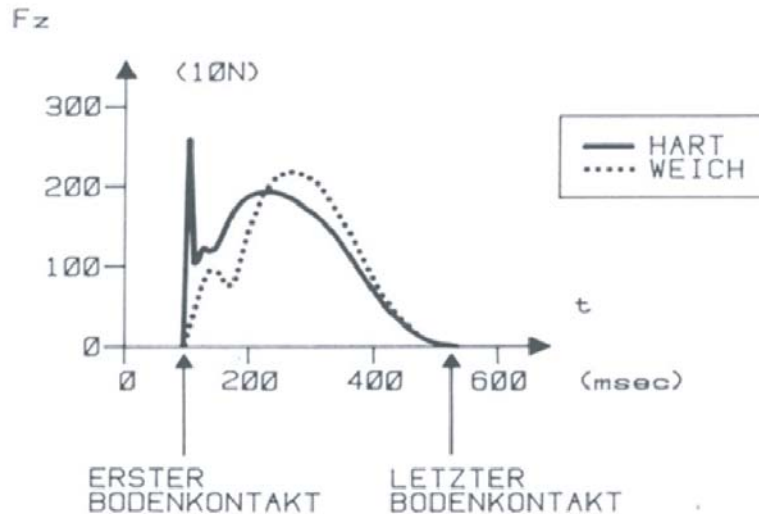


Abbildung 1.14: Die Grafik beschreibt die Bodenreaktionskraft (z-Richtung) beim Laufen, wenn der Fuss über die Ferse auf einem harten bzw. weichen Boden aufgesetzt wird. Die Kraftkurve ist durch zwei Abschnitte zu charakterisieren. Die erste Spitze beschreibt das Aufsetzen des Fusses auf den Boden und entspricht einem Aufprall. Der zweite Abschnitt beschreibt das Abbremsen und Beschleunigen des KSP durch Muskelkräfte. Durchgezogene Linie = harter Boden im Vergleich zur Fersenpolsterung. Die Kraft ist durch eine kurzzeitige Spitze charakterisiert. Gestrichelte Linie = weicher Boden im Vergleich zur Fersenpolsterung. Die erste Spitze ist viel kleiner und tritt auch etwas verspätet auf.

Millisekunden. Diese erste Kontaktphase könnte also gut durch den Aufprall einer kinematischen Kette beschrieben werden. Die resultierende Kraft könnte

dann durch einfache mechanische Variablen beschrieben werden. Diese Beschreibung ist mechanisch zutreffend, falls die Muskulatur während der Kontaktphase keine nennenswerte Drehmomente bezüglich den Gelenken aufbauen kann und die Nichtstarrheit des Bewegungsapparates in dieser kurzen Phase ebenfalls eine untergeordnete Rolle spielt und als zeitunabhängige Grösse approximiert werden kann.

Die Aufprallkräfte bei standardisierten Niedersprüngen wurden untersucht. Standardisiert bedeutet hier: Einbeinige-Fersen-Landungen, Arme auf Rücken, unterschiedliche Fallhöhen, unterschiedliche Knie- und Hüftwinkel bei der Landung, unterschiedlich harte Unterlagen. Gemessen wurde bei diesen Experimenten die Bodenreaktionskraft, die Beschleunigung des Knöchels (Knöchel als Stellvertreter für den Fusspunkt) sowie dessen Aufprallgeschwindigkeit, der Unterschenkelwinkelverlauf, der Knie- und der Hüftwinkelverlauf.

Aus diesen Messdaten wurde aus dem Verhältnis von Bodenreaktionskraft zu Beschleunigung des Fusspunktes eine experimentelle effektive Masse berechnet:

$$m_{exp}^* = \frac{F_{Boden_{max}}}{\ddot{z}_{Knöchel_{max}} + g} \quad (1.28)$$

Diese effektive Masse beschreibt – falls sie einen Sinn macht – die Masse, die der Boden *spürt* während einer Aufprallsituation. Diese experimentelle effektive Masse ist in Abhängigkeit des Kniewinkels für eine Versuchsperson von 68 kg in Abbildung 1.15 als Messpunkt mit Streuung dargestellt. Bei fast gestrecktem Knie (170°, gestreckt = 180°) beträgt diese effektive Masse ca. 10 kg, bei gebeugtem Knie (130°) ca. 4 kg.

Das Verhalten einer dreigliedrigen kinematischen Kette bestehend aus Unterschenkel, Oberschenkel und Oberkörper wurde während einer Aufprallsituation ebenfalls simuliert. Berechnet wurde wieder die effektive Masse analog zu Formel (1.27) bzw. (1.28). Diese theoretische effektive Masse ist abhängig von der Masse der einzelnen starren Körper. Da aber Unterschenkel, Oberschenkel und Oberkörper keine starren Körper sind, wurden für diese Berechnungen die starren Massenanteile experimentell als auch theoretisch abgeschätzt. Für den starren Körper *Unterschenkel* wurde 50% der Masse vom Unterschenkel und Fuss, für den starren Körper *Oberschenkel* wurde 50% der Masse des Oberschenkels und für den starren Körper *Oberkörper* wurde 20% der Restkörpermasse eingesetzt. Zum Restkörper gehören auch das zweite Bein und die Arme. Diese Abschätzungen liefern für die Versuchsperson von 68 kg folgende absoluten Massen: 2.1 kg für den Unterschenkel, 3.4 kg für den Oberschenkel und 11.4 kg für den Oberkörper. Die Werte für die effektive Masse aus den Simulationsrechnungen (für zwei unterschiedliche Positionen des Unterschenkels beim ersten Bodenkontakt) sind ebenfalls in Abhängigkeit des Kniewinkels in Abbildung 1.15 dargestellt. Die Werte sind als ausgezogene Linien dargestellt.

Die Übereinstimmung zwischen den experimentellen und den theoretischen Werten ist gut. Dies bestätigt einerseits, dass für die Bestimmung von Aufprallkräften das Modell *kinematische Ketten* ein gutes Werkzeug darstellt. Die

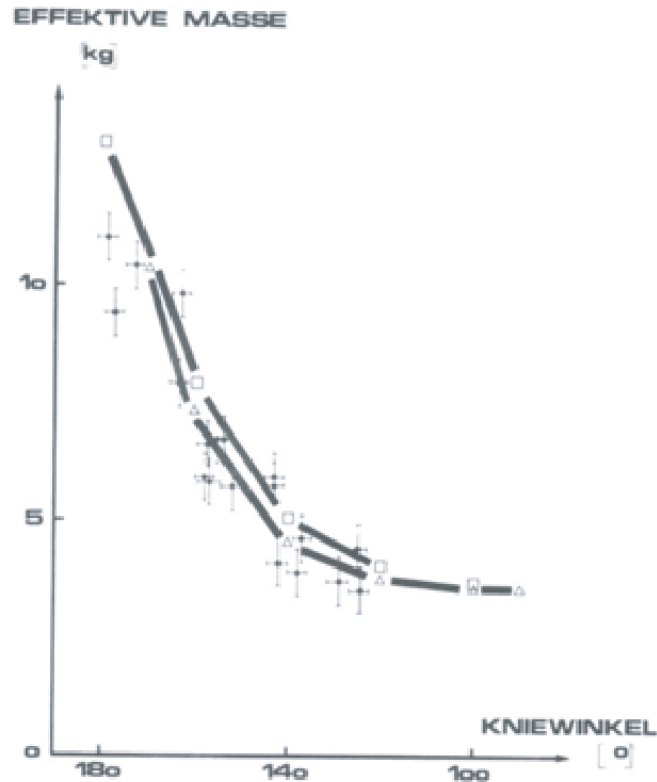


Abbildung 1.15: Die experimentelle und theoretische effektive Masse in Abhängigkeit des Kniewinkels. Masse der VP = 68 kg. Punkte = Experiment, Quadrate = Simulation Unterschenkelwinkel = 80°, Dreiecke = Simulation Unterschenkelwinkel = 100°.

Resultate zeigen andererseits auf, dass Aufprallkräfte stark sowohl von der Körperstellung als auch vom Verhältnis der *starren* zur ganzen Masse eines Körperteils abhängig sind. Dieser letzte Punkt wird im nächsten Abschnitt, *Das Schwabbelmassen - Modell* etwas genauer analysiert.

Bei einer gestreckten Landung beträgt die effektive Masse, bei korrigiertem Anteil an Weichteile, ca. 20% der gesamten Körpermasse, bei einer gehockten Landung ca. 4-5% der Körpermasse. Eine kleine Aufprallmasse erzeugt aber auch eine kleinere Reaktionskraft bei einer kürzeren Kontaktzeit.

Die Aufprallphase ist zeitlich sehr kurz. Sie beträgt in der Regel weniger als 50 Millisekunden. In dieser kurzen Zeit kann die Muskulatur die Kraft aktiv nicht wesentlich verändern, da die Totzeit (bestehend aus der Reflexzeit und Zeitspanne der *elektromechanischen* Kopplung) etwa von gleicher Größenordnung ist. Die Muskulatur kann daher nur durch eine aufgezwungene Dehnung bzw. Verkürzung verändert werden. Das generelle Verhalten wird in Abschnitt 1.6 *Regelung der Motoren – eine aktive kinematische Kette* genauer besprochen.

1.5 Berücksichtigung der Weichteile: Das Schwabbelmassen - Modell

Die Körperteile Unterschenkel, Oberschenkel und Oberkörper verhalten sich bei sehr dynamischen Bewegungen (wie z.B. bei harten Landungen) nicht wie starre Körper. Das Schwabbelmassen-Modell wurde entwickelt, um dieses *nicht starre Verhalten* in einer ersten Näherung zu berücksichtigen (siehe Abbildung 1.16). Das Grundgerüst des Modells ist eine kinematische Kette. In diesem Beispiel besteht die kinematische Kette aus vier starren Körpern mit folgenden Massen und Trägheitsmomenten:

$$m_{Fuss}^{hart}, m_{US}^{hart}, m_{OS}^{hart}, m_{OK}^{hart} \text{ und } I_{Fuss}^{hart}, I_{US}^{hart}, I_{OS}^{hart}, I_{OK}^{hart}.$$

Die KSP-Koordinaten dieser vier Körper und die Winkel, die die Stellung beschreiben, lauten:

$$\vec{r}_{Fuss}^{hart}, \vec{r}_{US}^{hart}, \vec{r}_{OS}^{hart}, \vec{r}_{OK}^{hart} \text{ und } \phi_{Fuss}^{hart}, \phi_{US}^{hart} = \varphi_{1S}, \phi_{OS}^{hart} = \varphi_{2S}, \phi_{OK}^{hart} = \varphi_{3S}.$$

Diese vier Körper repräsentieren die starren Körperanteile Fuss, Unterschenkel, Oberschenkel und Oberkörper. Die vier Glieder sind über Scharniergelenke miteinander verbunden und bilden das Grundgerüst.

An drei starren Gliedern (ohne Fuss) ist je ein starrer Körper aufgehängt. Diese drei starren Körper stellen die Weichteile von Unterschenkel, Oberschenkel und Oberkörper dar. Die Massen und Trägheitsmomente dieser drei Körper sind:

$$m_{US}^{weich}, m_{OS}^{weich}, m_{OK}^{weich} \text{ und } I_{US}^{weich}, I_{OS}^{weich}, I_{OK}^{weich}.$$

Jeder dieser drei starren Körper hat drei Freiheitsgrade; zwei der Translation und einen Freiheitsgrad für die Rotation. Die KSP-Koordinaten und die Winkelkoordinaten sind:

$$\vec{r}_{US}^{weich} = \vec{r}_{US}^{hart} + \Delta\vec{r}_1, \vec{r}_{OS}^{weich} = \vec{r}_{OS}^{hart} + \Delta\vec{r}_2, \vec{r}_{OK}^{weich} = \vec{r}_{OK}^{hart} + \Delta\vec{r}_3 \text{ und} \\ \phi_{US}^{weich} = \phi_{US}^{hart} + \Delta\varphi_1, \phi_{OS}^{weich} = \phi_{OS}^{hart} + \Delta\varphi_2, \phi_{OK}^{weich} = \phi_{OK}^{hart} + \Delta\varphi_3$$

Rückstellkräfte und Rückstellmomente greifen an diesen Körpern an und ziehen diese immer in die Ruheposition zurück. (Genauere Angaben zu diesen Grössen findet man in der Originalliteratur.) Damit ist das System vollständig beschrieben.

Dieses Schwabbelmassen-Modell, ein Konzept zur approximativen Beschreibung der Weichteileffekte, ist (für uns) relativ komplex. Es besitzt 15 Freiheitsgrade und eine Vielzahl an Parametern, die experimentell zu bestimmen sind. Nur für die Massen der einzelnen Körper gibt es einfache Relationen. Hier ein Beispiel für den Unterschenkel:

$$m_{US}^{weich} + m_{US}^{hart} = m_{US} = 0.047 \cdot m_{Total}$$

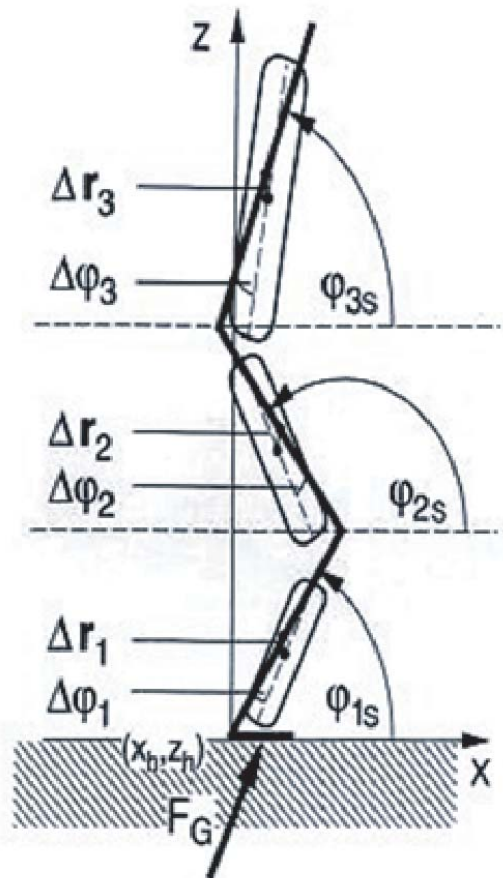


Abbildung 1.16: Schematisches Bild des Schwabbelmassen-Modells. Das Modell besteht aus einer viergliedrigen kinematischen Kette mit drei angehängten starren Körpern, die das mechanische Verhalten der Weichteile in einer ersten Näherung beschreiben.

Die Aufprallkraft, eine äussere Kraft, die bei einer Landung entsteht, kann relativ einfach mit Hilfe einer Kraftmessplatte gemessen werden. Die Zwangskraft im Kniegelenk, als Beispiel für eine innere Kraft ist im Gegensatz zu den äusseren Kräften ohne chirurgische Eingriffe nicht direkt messbar. Diese inneren Kräfte können nur theoretisch abgeschätzt werden. Daher kommt dem Modell, das verwendet wird, um die Rechnungen durchzuführen, eine zentrale Bedeutung zu. Gruber et al. (1998) verglichen die Aufpralldynamik von starren Modellen mit derjenigen des Schwabbelmassenmodells. Um die Realität möglichst gut anzunähern, wurden Landungen mit dem Schwabbelmassenmodell simuliert. Das Schwabbelmassenmodell selber wurde in einer früheren Arbeit entwickelt. Die Modellparameter wurden durch spezielle, zum Teil sehr zeitaufwendige Versuche auf eine Person abgestimmt. Bei den simulierten Landungen wurden auch muskuläre Drehmomente zugelassen, um die Landung bis zum Stillstand zu berechnen. Diese Drehmomente wurden als Input für die Vorwärts-Simulationen vorgegeben. Berechnet wurden einerseits die Grössen, die auch experimentell

zugänglich sind, so z.B. die Bodenreaktionskraft und die Kinematik der Gelenksachsen. Andererseits wurden aber auch innere Kräfte berechnet, wie z.B. die Zwangskraft im Kniegelenk (siehe Abbildung 1.17 rechts, gestrichelte Linie). Diese so berechneten theoretischen Grössen wie Bodenreaktionskraft und Kinematik der Gelenksachsen wurden dann verwendet, um die inneren Kräfte zurückzurechnen (= Inverse Dynamik). Beim Zurückrechnen wurde kein Schwabbelmassenmodell verwendet, sondern eine einfache kinematische Kette. Diese Resultate sind in Abbildung 1.17 (ausgezogene Linie) dargestellt. Die Unterschiede sind in den ersten 40-50 Millisekunden sehr gross: Unrealistische muskuläre Kräfte treten auf! Als Konsequenz daraus können wir uns merken: die Wahl des Modells hat einen grossen Einfluss auf die Berechnung der inneren Kräfte bei gleicher Bodenreaktionskraft und Kinematik der Gelenksachsen.

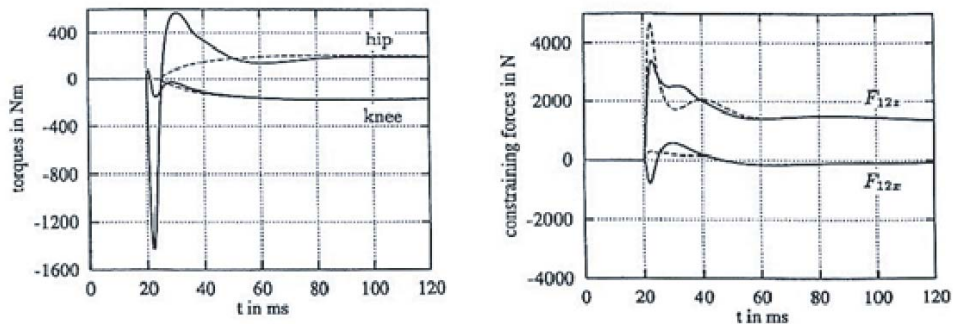


Abbildung 1.17: Links: Dargestellt sind die muskulären Drehmomente im Knie- und Hüftgelenk als Funktion der Zeit bei einer Landung. Die gestrichelten Linien entsprechen der Vorgabe der Drehmomente bei der Vorwärtssimulation mit dem Schwabbelmassen-Modell. Die ausgezogenen Linien stellen die aus der inversen Dynamik berechneten Drehmomente dar, falls auf Weichteile verzichtet wird. Rechts: Dargestellt sind die Komponenten der Zwangskraft im Kniegelenk als Funktion der Zeit. Die gestrichelten Linien beschreiben die Zwangskraft bei Verwendung des Schwabbelmassen-Modells, die ausgezogenen Linien die Zwangskraft falls auf die Weichteile verzichtet wird.

Für Interessierte sei auf die Originalliteratur verwiesen:

K. Gruber, H. Ruder, J. Denoth & M. Schneider (1998). A comparison study of impact dynamics: wobbling mass model versus rigid body models. J. of Biomechanics Vol 31, pp 439-4 und weitere darin zitierte Arbeiten.

1.6 Regelung der Motoren – eine aktive kinematische Kette

Die Fortbewegung ist der Schlüssel zum Verständnis der weiten Verbreitung und Besiedlung der Lebensräume. Fortbewegung ist für den Menschen ebenfalls von Bedeutung – neben vielen anderen Aspekten –, um seinen Bewegungsapparat zu stärken bzw., um eine gewisse Belastbarkeit des Bewegungsapparates zu erhalten. Für das Verständnis der Fortbewegung ist es wichtig zu wissen, auf

welche Art und Weise die Skelettmuskulatur die chemische Energie in Bewegung umwandelt und wie dieser Prozess vom Zentralnervensystem gesteuert und geregelt wird. Ferner unterliegt z.B. die Bewegung Gehen – eine automatisierte Bewegung beim Erwachsenen – keinem völlig starren Schema. Sie werden von Sinnesorganen kontrolliert, die den Ablauf der Bewegung der einzelnen Glieder zueinander und ihre Stellung im Raum registrieren und eine Kompensation eventuell auftretender Störungen bewirken. Motorik und Sensorik arbeiten bei der Lokomotion eng zusammen. Diese Regelkreise sind im unteren Bild am Beispiel eines Insekten dargestellt (siehe Abbildung 1.18).

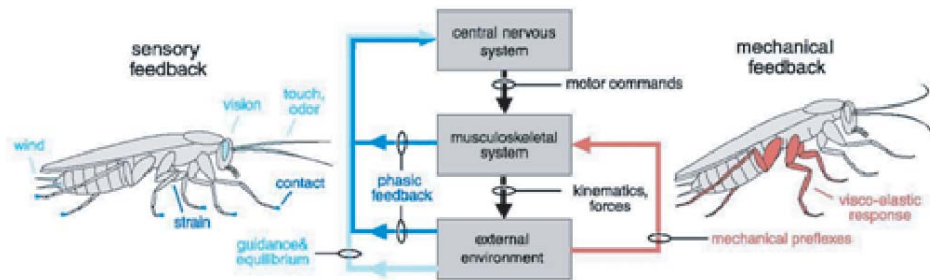


Abbildung 1.18: Schematische Darstellung der verschiedenen Regelkreise, die bei der Lokomotion eine wesentliche Rolle spielen. Drei Bereiche werden hier unterschieden, nämlich das *musculoskeletal system*, das *central nervous system* und das *external environment*. Nach Dickinson et al., 2000.

Die Muskelspindeln und die Golgi-Sehnenorgane sind zwei von vielen Sensoren, die beim Menschen von Bedeutung sind. Die Muskelspindeln haben die Aufgabe, eine voreingestellte Länge eines Muskels zu regeln. Die Aufgabe der Golgi-Sehnenorgane ist es, den Bewegungsapparat vor Überlastung zu schützen. Sie hemmen über Ib-Afferenz und hemmende Interneurone im Rückenmark das Motoneuron und vermindern damit die Muskelaktivität (= Schutzreflex). Diese Verschaltung ist in Abbildung 1.19, linkes Bild dargestellt.

In einem Regelkreis fließt Information von Punkt A zu Punkt B. Um diese Distanz zurückzulegen, benötigt die Information eine gewisse Zeitdauer, da die Nervenleitgeschwindigkeit von der Größenordnung von ca. 100 ms^{-1} ist. Ferner muss die Information auch bearbeitet werden, was ebenfalls Zeit beansprucht (pro Synapse benötigt das ZNS ca. 4 msec). Diese gesamte Zeit – Laufzeit und Verarbeitungszeit – wird in der Technik als Totzeit bezeichnet. Innerhalb dieser Totzeit kann das System auf eine Störung nicht reagieren. Diese Totzeit ist beim Menschen von der Größenordnung von 30 msec. Dies bedeutet, dass vom Zeitpunkt, wo eine Störung die Spannung der Golgi-Sehnenorgane oder die Länge der Muskelspindel verändert, ca. 30 msec verstreichen, bis die Aktivität auf die Störung geantwortet hat (siehe Abbildung 1.20). Die Muskelkraft reagiert nicht sofort auf eine Änderung der Aktivität; weitere 30 – 70 msec können verstreichen, bis sich die Muskelkraft der Aktivität angepasst hat. Somit beträgt die Zeit, die benötigt wird, um die Muskelkraft aktiv der Störung anzupassen, ca. 60 – 100 msec (siehe Abbildung 1.19, rechtes Bild). Dies bedeutet, dass während

der Aufsetzphase, wie in den vorigen Abschnitten besprochen, die Muskelkraft aktiv – als Antwort auf die Störung – nicht wesentlich verändert werden kann.

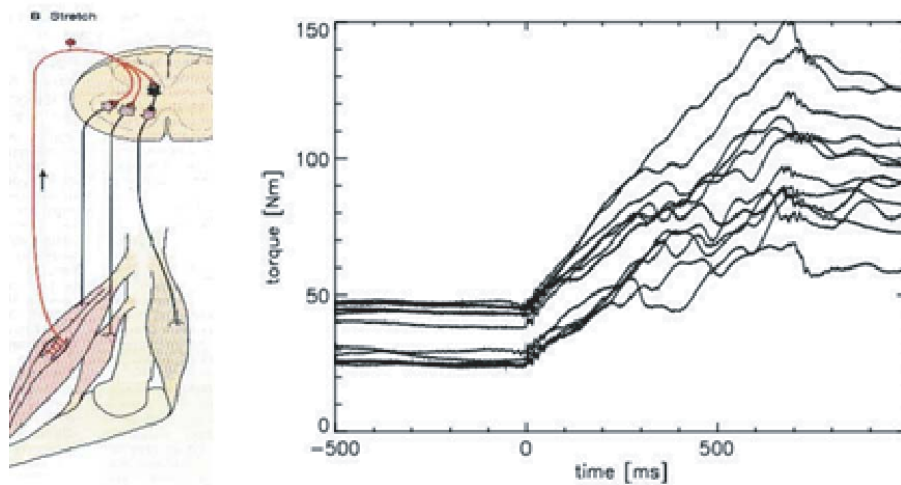


Abbildung 1.19: Links: Schematische Darstellung des Reflexbogens für den Sensor Muskelspindel bei einer Dehnung des Muskels. Die Dehnung der Muskelspindel führt zu einer Hemmung der Antagonisten und zu einer Aktivierung der Agonisten. Rechts: Antwort der Unterschenkelmuskulatur (triceps surae und Antagonisten) bei einer unerwarteten Dehnung des triceps surae bei unterschiedlichen Aktivitäten. Die Dehnung startet bei der Zeit $t = 0$ msec. Gemessen wurde das muskuläre Drehmoment. Achse: bis zu ca. 100 msec ist die Antwort der Muskulatur auf die Störung konstant.

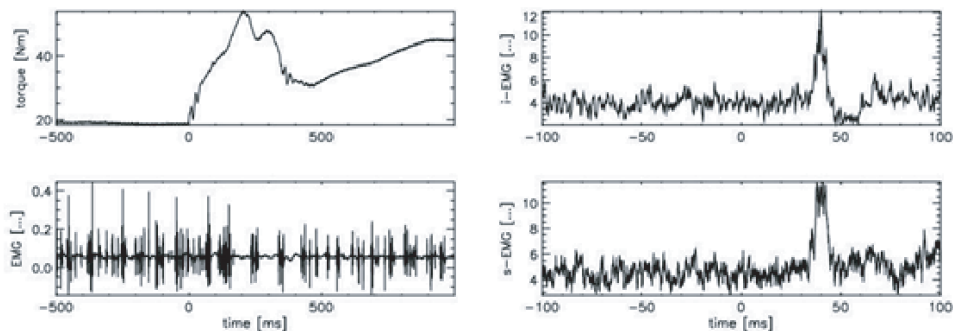


Abbildung 1.20: Links oben: Drehmoment-Zeit-Verlauf bei einem Einzelversuch. Links unten: Das dazugehörige EMG-Signal gemessen mittels Drahtelektroden. Das Aktivitätsmuster ändert sichtbar ab ca. 80 msec. Rechts: Statistisch aufgearbeitete Aktivitätsmuster für mehrere identische Versuche. Die Totzeit für die gemessene Person beträgt ca. 40 msec. EMG-Signal gemessen mittels Drahtelektroden (oben), bzw. mittels Oberflächenelektroden (unten)

1.7 Bemerkungen zu den Gelenken

Um die Kinematik kinematischer Ketten möglichst einfach zu halten, haben wir die einfachen, planaren kinematischen Ketten eingeführt. Scharniergelenke verbinden die einzelnen starren Körper miteinander. Scharniergelenke lassen nur einen Freiheitsgrad mit einer fixen Drehachse zu. Will man kinematische Ketten im Raum beschreiben und den Gelenken fixe Achsen zuordnen, so hat man prinzipiell die Wahl einen, zwei oder sogar drei Freiheitsgrade zuzulassen. Konstruktionsbeispiele für diese Zuordnung der Freiheitsgrade sind in Abbildung 1.21, links dargestellt. Biologische Gelenke sind etwas anders konstruiert und besitzen keine fixen Drehachsen (siehe Abbildung 1.21, rechts). Biologische Gelenke weisen in der Regel zwei Konstruktionsmerkmale auf: (A) *harte* Flächen, welche die gegenseitige Bewegungsfreiheit senkrecht zu den Flächen einschränken, und (B) *elastische* Bänder, welche die zwei starren Körper zusammenhalten. Die momentane Drehachse solcher Gelenkkonstruktionen ist daher einerseits abhängig von der Belastungssituation (= äusseren Kräfte), aber auch von den einzelnen Muskelkräften und der Viskoelastizität der Bänder. Im Weiteren ist die momentane Drehachse solcher Gelenke positionsabhängig, d.h. die momentane Drehachse *wandert* mit der Stellung der zwei benachbarten Glieder der

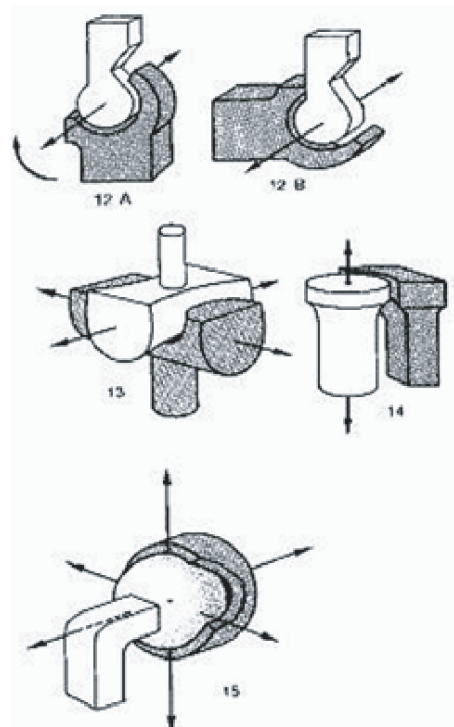


Abbildung 1.21: Links: Beispiele von mechanischen Gelenken mit fixen Drehachsen und eins, zwei oder drei Freiheitsgrade. Rechts: Dorsale Ansicht des Kniegelenkes. Bei biologischen Gelenken sind keine fixen Drehachsen vorgegeben; die zwei starren Körper gleiten und rollen.

kinematischen Kette. Dieses Wandern der momentanen Drehachse ist bestimmt durch die Krümmung der Berührungsflächen. Unter dem Einfluss der Muskulatur und der Viskoelastizität der Bänder wird die Beschreibung der Lage der momentanen Drehachse noch viel komplexer.

Auf eine mathematische Beschreibung solcher Zwangsbedingungen wird hier verzichtet. Die Problematik wird am Beispiel der Kniescheibe als Patella-Femoral-Gelenk weiter unten aufgezeigt. Die Komplexität der Gelenke und die Anzahl der Glieder einer kinematischen Kette können die Kinematik der benachbarten Gelenksachse stark beeinflussen. Diese Trivialität ist am Beispiel eines mehr oder weniger komplexen Fusses in Abbildung 1.22 dargestellt. Ohne Fuss (A) beschreibt die Achse des Kniegelenkes einen Kreisbogen, falls der Fusspunkt sich nicht verschiebt und die Unterlage nicht deformiert werden kann. Ein steifes Fussgelenk (B) führt dazu, dass das Kniegelenk – bei gleichen Randbedingungen – zwei Kreisbogen ausführt. Die Radien dieser Kreisbogen sind gegeben durch die momentanen Berührungspunkte „Fuss-Boden“ und der Achse des Kniegelenks. Bei einem steifen Gelenk sind diese zwei Radien etwa gleich gross. Bei einem Fuss mit oberem Sprunggelenk (OSG) kommt es zu einer kleinen Knickbewegung der Knieachse (erste Phase in C). Diese Knickbewegung ist durch die Abklappbewegung des Fusses gegeben.

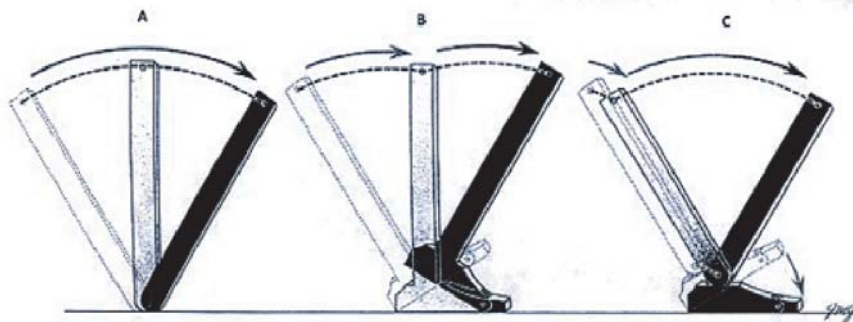


Abbildung 1.22: Einfluss der Anzahl Segmente einer kinematischen Kette auf die Kinematik der benachbarten Gelenksachsen. A: Ohne Fuss; Bahn der Knieachse = Kreisbogen. B: Mit Fuss, kein OSG!; Bahn der Knieachse = zwei Kreisbogen, ähnliche Radien. C: Mit Fuss und OSG; Bahn der Knieachse = zwei Kreisbogen, sehr unterschiedliche Radien.

In Abbildung 1.23 ist das Patella-Femoral-Gelenk schematisch dargestellt. Die Patella (= Kniescheibe), ein starrer Körper, leitet die Muskelkraft des Quadriceps über die Patellarsehne zur Tibia. Da die Kniescheibe ein starrer Körper ist, muss sie in Abhängigkeit des Kniewinkels und der Muskelkraft auf den Kondylen des Femurs hin- und hergleiten, um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen. Unter Vernachlässigung der Gleitreibungskraft zwischen Patella und Femur und der Vereinfachung der Geometrie der Patella zu einem dünnen Balken (Abbildung 1.23, Bild rechts) führt die Gleichgewichtsbedingung dazu, dass die Patella an einer ganz bestimmten Position den Femur berührt. Die Position, markiert mit X, muss so sein, dass die Summe aller Kräfte, die an die Patella angreifen und die Summe aller Drehmomente verschwinden. Diese Bedingung

und deren Konsequenzen werden in der Vorlesung – als Repetition der Statik starrer Körper – im Detail besprochen.

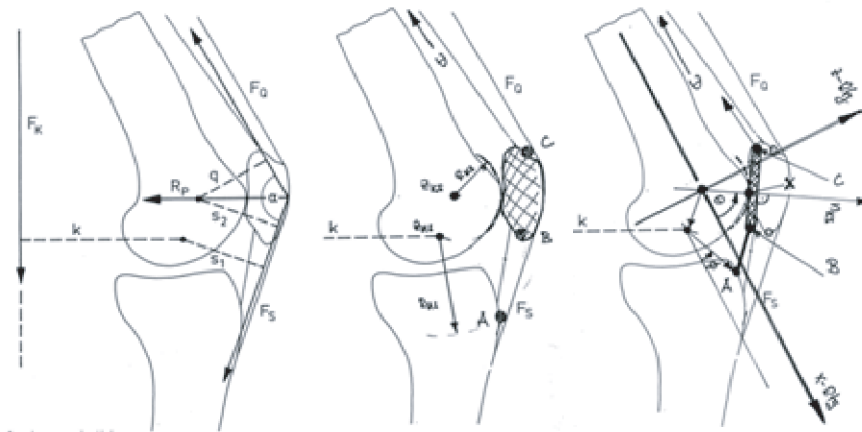


Abbildung 1.23: Schematische Darstellung des Patella-Femoral-Gelenkes für eine Modellierung dieses Gelenkes. Links: ein reales Abbild des Kniegelenkes, Mitte: Die Patella als starrer Körper (schraffiert), Rechts: ein vereinfachtes Bild für die Patella (ebenfalls schraffiert).

1.8 Anhang 1: Der Newton'sche und Lagrange'sche Formalismus in der Mechanik

In diesem Exkurs wird die Mechanik starrer Körper anhand einfacher Beispiele kurz repetiert: Der Newton'sche und Lagrange'sche Formalismus stehen dabei im Vordergrund.

1.8.1 Wo liegen die Schwierigkeiten bei der Lösung mechanischer Probleme?

Im Folgenden wird auf Schwierigkeiten eingegangen, die bei der mathematischen Behandlung komplexer mechanischer Systeme auftreten können. Eine Schwierigkeit liegt in der Formulierung der Bewegungsgleichung selber. Solche Probleme liegen meistens dann vor, wenn Zwangsbedingungen die Bewegungsfreiheit einzelner Körperteile einschränken. Die Koordinaten, die die Bewegung des Systems ohne Zwangsbedingungen beschreiben, sind nicht mehr voneinander unabhängig und die Zwangskräfte, die die Bewegung einschränken sind nicht a priori gegeben. Einfache Beispiele, bei denen Zwangskräfte auftreten, sind planare Bewegungen kinematischer Ketten. Planar bedeutet, dass die Bahnen der Punkte, in parallelen Ebenen liegen. Für das beschriebene Problem existieren heutzutage Programme, die die Bewegungsgleichung automatisch erzeugen.

Die zweite Schwierigkeit liegt in der Integration der Differentialgleichungssysteme. Wir sind (zum Glück!) keine Mathematiker oder Physiker und deshalb

nicht (immer) an einer exakten Lösung des mathematischen Problems interessiert. In vielen Fällen genügt eine Annäherung oder eine Abschätzung der Größenordnungen. Auch hier gibt es gute Routinen, um die Differentialgleichungssysteme numerisch zu integrieren.

Die Formulierung der Bewegungsgleichung für einen materiellen Punkt ist sehr einfach. Nach Newton gilt (raumfestes Koordinatensystem):

$$m\ddot{\vec{x}} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.29)$$

Die Integration ist abhängig von der Funktion Kraft. Neben dieser Gleichung, die die Bewegung explizit beschreibt, gelten zusätzlich die Energie- und Impulssätze.

Die Formulierung der Bewegungsgleichungen für einen starren Körper ist ebenfalls einfach, sehr einfach sogar, falls der Körper sich nur in einer Ebene bewegen kann. In diesem Spezialfall lauten die Gleichungen:

Für die Translation:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}_{KSP} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.30)$$

und für die Rotation:

$$I_{KSP} \cdot \ddot{\phi} = \sum_i M_i \quad (1.31)$$

mit:

$$M_i = (\vec{r}_{KSP-KAP_i} \times \vec{F}_i)_{2.Komponente} \quad (1.32)$$

Diese Relationen zwischen Kräften und Drehmomenten einerseits und Bewegungen andererseits gelten auch für jeden Schnitt in einem System starrer Körper. Das Vorgehen, um das Verhalten eines „herausgeschnittenen“ Teiles eines Systems zu studieren, wird im englischen Sprachraum im Begriff „Free body diagram“ subsumiert. Einfache Beispiele werden in der Vorlesung erläutert.

1.8.2 Begriffe und Formalismen in der Mechanik

Die Klassifikation von Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen, wie oben beschrieben, können aufgrund verschiedener Eigenschaften unterteilt werden. Oft wird folgende Einteilung vorgenommen: Wenn die Zwangsbedingungen durch Gleichungen dargestellt werden können, die die Koordinaten der Massenpunkte (bzw. der starren Körper, wenn die Winkel dazugenommen werden) und evtl. auch die Zeit explizit enthalten und die Form

$$f(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_N(t), t) = 0 \quad (1.33)$$

mit \vec{x}_i = Koordinate der Massenpunkt (bzw. der Körper) haben, dann spricht man von holonomen Zwangsbedingungen. Das einfachste Beispiel holonomer

Zwangsbedingungen liefert der starre Körper selber oder eine kinematische Kette. Zwangsbedingungen, die nicht auf diese Form gebracht werden können, heißen nichtholonome. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Massenpunkt, der über eine nicht dehnbare Schnur angebunden ist, d.h. der Massenpunkt darf höchstens einen bestimmten Abstand zum Koordinatenursprung einnehmen. Diese Form der Zwangsbedingung kann nur als Ungleichung geschrieben werden. Solche Formen können in der Biomechanik oft vorkommen, zum Beispiel beim Modellieren von Gelenken, falls der Knorpel als hart und die Bänder als elastisch beschrieben werden. Holonome Bedingungen schränken die Bewegungsfreiheit im Grossen ein, nichtholonome jedoch nur im Kleinen! Bewegungsfreiheit *im Grossen* bedeutet Bewegungsfreiheit im ganzen Konfigurationsraum, *im Kleinen* nur lokale Bewegungsfreiheit. Ferner gilt, dass nichtholonome Bedingungen nur auftreten können, wenn das System mindestens 3 Freiheitsgrade im Grossen besitzt.

Weiter können Zwangsbedingungen in rheonome und skleronome Bedingungen unterteilt werden, je nachdem ob sie die Zeit explizit enthalten (rheonom) oder nicht (skleronom).

Freiheitsgrade eines Systems und generalisierte Koordinaten

Ein System von N Massenpunkten (im 3-dimensionalen Raum), das frei von Zwang ist, hat $3N$ Freiheitsgrade. (Bem.: Ein Massenpunkt kann nicht rotieren bzw. eine Rotationsbewegung ist bei einem Massenpunkt sinnlos). Diese $3N$ Freiheitsgrade werden (in der Regel stillschweigend) durch $3N$ kartesische Koordinaten angegeben. Ein starrer Körper besitzt (im 3-dimensionalen Raum) 6 Freiheitsgrade, drei Freiheitsgrade der Translation (diese werden mit kartesische Koordinaten beschrieben) und drei Freiheitsgrade der Rotation (diese werden mit Winkelkoordinaten). Wird die Bewegung eines Systems von N Massenpunkten durch k holonome Zwangsbedingungen, also k Gleichungen wie oben angegeben, eingeschränkt, so bleiben noch $3N-k$ unabhängige Koordinaten übrig: Das System hat $3N-k$ Freiheitsgrade.

Zwei starre Körper im Raum, die über ein Scharniergelenk – ein Scharniergelenk lässt nur einen Freiheitsgrad zu – miteinander verbunden sind, haben also $12 - 5 = 7$ oder $6 + 1$ Freiheitsgrade. Zwei starre Körper, die nur planare Bewegungsfreiheit haben und ebenfalls über ein Scharniergelenk verbunden sind besitzen $3 + 1 = 4$ Freiheitsgrade.

Die Elimination der abhängigen Koordinaten kann durch Einführung neuer Grössen, sogenannte generalisierte Koordinaten $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ dargestellt werden. Durch diese generalisierten Koordinaten können dann die *alten* Koordinaten $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ ausgedrückt werden. Für N Massenpunkte im 3-dim. Raum mit k holonomen Zwangsbedingungen können die alten Koordinaten dann in der Form:

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_1(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-k}(t), t) \quad (1.34)$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_2(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-k}(t), t) \quad (1.35)$$

$$\dots \tag{1.36}$$

$$\vec{x}_N(t) = \vec{x}_N(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-k}(t), t) \tag{1.37}$$

geschrieben werden.

Die generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots können in der Regel nicht mehr als Tripel von kartesischen Koordinaten geschrieben werden. Kombinationen wie kartesische Koordinaten, Winkelkoordinaten, Arbeit oder Drehimpuls können als generalisierte Koordinaten geeignet sein. Im Beispiel eines Doppelpendels, das sich nur in einer Ebene bewegen kann, sind die Winkel, die die Auslenkung der Pendel, z.B. gegenüber der Vertikalen, messen, generalisierte Koordinaten.

Konservative Systeme

Ein mechanisches System wird als konservativ bezeichnet, falls die Kräfte, die wirken, als Gradient einer Potentialfunktion geschrieben werden können. In einem konservativen System ist die durch die Kräfte geleistete Arbeit deshalb nur vom Anfangs- und Endpunkt des zurückgelegten Weges abhängig, jedoch nicht vom ausgewählten Weg. Anders ausgedrückt: die Arbeit, die von einer konservativen Kraft erbracht wird, ist längs eines geschlossenen Weges gleich null. Damit gilt auch: Wenn die Kräfte, die auf einen Massenpunkt wirken, konservativ sind, dann bleibt die Gesamtenergie des Massenpunktes erhalten.

Physikalisch gesehen ist klar, dass ein System nicht konservativ sein kann, wenn z.B. Reibungskräfte vorhanden sind. Ein einfaches Beispiel eines nicht konservativen Systems ist der gedämpfte harmonische Oszillator.

Die Potentialfunktion zur Schwerkraft $F = mg$ ist die potentielle Energie $E_{pot} = mg \cdot h$, die Potentialfunktion zur Federkraft $F = kx$ ist die Potentialfunktion $E_{Def} = \frac{1}{2}k \cdot x^2$.

1.8.3 Formalismen

Der Newton'sche Formalismus

Im Newtonsch'en Formalismus werden in einem ersten Schritt die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Massenpunkte (bzw. die einzelnen starren Körper) aufgeschrieben. Neben den bekannten angreifenden Kräften müssen in der Formulierung auch die zunächst unbekanntes Zwangskräfte aufgeführt werden. Die Variablen, die in diesen Gleichungen erscheinen, sind kartesische Koordinaten und deren Ableitungen nach der Zeit (bzw. kartesische Koordinaten und Winkelkoordinaten und deren Ableitungen) und evt. zusätzlich die Zeit explizit und die unbekanntes Zwangskräfte. In einem zweiten Schritt werden die Zwangsbedingungen formuliert, welche die Zwangskräfte zur Folge haben. Holonome Bedingungen (siehe oben) stellen ebenfalls Gleichungen zwischen den kart. Koordinaten (bzw. kart. Koordinaten und Winkelkoordinaten) dar; sie sind nicht mehr voneinander unabhängig.

Diese Abhängigkeit der Koordinaten und die Tatsache, dass die Zwangskräfte a priori unbekannt sind, erschweren die Integration der Bewegungsgleichung sehr. Jedes Problem wird individuell behandelt, ohne auf ein fundiertes Konzept oder eine Theorie zurückgreifen zu können. Das fundierte Konzept liefert der Lagrange'sche Formalismus.

Der Lagrange'sche Formalismus

Um die Schwierigkeit zu überwinden, die die a priori zuerst unbekanntem Zwangskräfte hervorrufen, werden Formulierungen der Mechanik gesucht, die die Zwangskräfte nicht explizit enthalten. Das Resultat dieser theoretischen Arbeiten sind die Lagrange'schen Gleichungen 2. Art. Die Lagrange'schen Gleichungen für ein konservatives System lauten (f =Anzahl Freiheitsgrade): $\forall k, k = 1, \dots, f$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (1.38)$$

mit L der Lagrangefunktion:

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) - V(q_1, \dots, q_f, t) \quad (1.39)$$

wobei T die gesamte kinetische Energie des Systems beschreibt und V die Summe der Potentiale der Einzelkräfte darstellt.

In diesem Formalismus treten neben den generalisierten Koordinaten auch generalisierte Kräfte auf. Diese müssen nicht die Dimension einer Kraft haben. Das Produkt *generalisierte Koordinate* mal *generalisierte Kraft* zum gleichen Index müssen jedoch die Dimension einer Arbeit haben. Die generalisierten Kräfte können wie folgt berechnet werden:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \frac{\partial \vec{x}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)}{\partial q_j} \quad (1.40)$$

Lagrange'sche Gleichungen (wie oben dargestellt) gelten auch für nicht konservative Systeme, falls die generalisierten Kräfte von einer Funktion nach einer bestimmten Vorschrift abgeleitet werden können. Allgemein gilt, dass dann, wenn nur einige Kräfte konservativ sind, die Lagrange'schen Gleichungen stets in der Form ($\forall k, k = 1, \dots, f$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = Q_k \quad (1.41)$$

geschrieben werden können. L enthält nur das Potential der konservativen Kräfte. Q_j stellt die verallgemeinerten Kräfte dar, die nicht von einem Potential herühren. Solche Situationen treten oft dann auf, wenn Reibungskräfte im Spiel sind.

1.8.4 Anwendungen der Lagrange'schen Formulierung

Der Lagrange'sche Formalismus weist gegenüber dem Newton'schen Formalismus einige Vorteile auf. Während in der Newton'schen Schreibweise viele vektorielle Kräfte und Beschleunigungen auftreten, muss man nach der Lagrange'schen Methode nur noch zwei skalare Größen ermitteln, nämlich T und V . Dies vereinfacht das Problem sehr stark, vor allem wenn es darum geht Routineverfahren aufzustellen, um automatisch, d.h. mit Hilfe des Computers, die Bewegungsgleichungen aufzuschreiben. Man muss zuerst T und V in generalisierte Koordinaten umwandeln und daraus die Lagrange Funktion L bilden. Durch partielle Differentiation, eine einfache mathematische Operation, erhält man die Bewegungsgleichungen in den generalisierten Koordinaten. Die Integration des Differentialgleichungssystems ist oft noch ein zusätzliches individuelles Problem. Im Bereich der Biomechanik begnügen wir uns in der Regel mit numerischen Lösungen.

Anhand der unten aufgeführten Beispiele sollen einerseits diese zwei Formalismen geübt und, andererseits sollen auch die Differentialgleichungen gelöst werden (wenigstens in linearisierten Approximationen), um die Bewegung einfacher mechanischer Systeme zu verstehen.

1.8.5 Zusammenfassung, Kochbuchrezepte

Aufstellen der BG nach Newton

Das allgemein gültige Rezept zur Aufstellung der Bewegungsgleichung eines Systems lautet:

- Schreibe alle Kräfte auf in Abhängigkeit von den $3N$ Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten.
- Schreibe alle Zwangsbedingungen auf ($k = \text{Anzahl Zwangsbedingungen}$). Merke: zu jeder Zwangsbedingung gehört eine Zwangskraft.
- Schreibe die Bewegungsgleichung auf mit den unbekanntem Zwangskräften.
- Versuche die Zwangskräfte zu eliminieren. Wenn ohne Erfolg, dann nimm das Prinzip von d'Alembert, Zwangskräfte verrichten keine Arbeit, zu Hilfe.

Aufstellen der BG nach Lagrange (für konservative Systeme)

Die allgemein gültige Gebrauchsanweisung zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lautet:

- Schreibe den Ausdruck $L = T - V$ in Abhängigkeit von den $3N$ Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen auf. $T = \text{gesamte kinetische Energie des Systems}$, $V = \text{Summe der Potentiale zu den einzelnen Kräften}$.

- Drücke die $3N$ Koordinaten durch $3N - k$ unabhängige Koordinaten aus ($k =$ Zahl der holonomen Nebenbedingungen).
- Bestimme die Lagrangefunktion L als Funktion der $3N - k$ unabhängigen Koordinaten, der Geschwindigkeiten (und evtl. der Zeit).
- Stelle die Lagrangegleichungen auf.

1.9 Anhang 2: Mechanik deformierbarer fester Körper (Elastomechanik)

Die mechanischen Eigenschaften und deren Beschreibung im Detail ist der Inhalt der Vorlesung Biomechanik II, passiver Bewegungsapparat. In diesem Anhang werden einerseits die wichtigsten Begriffe der Elastomechanik (in Anlehnung an G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik) wiedergegeben und andererseits exemplarisch einige Zahlen als Größenordnungen für Elastizitätsmodule, Bruchspannungen und Bruchdehnungen etc. von biologischen Materialien angegeben. Biologisches Material zeigt generell auch ein stark viskoelastisches Verhalten. Mehr Details zu den Materialeigenschaften findet man in den Unterlagen zur oben erwähnten Vorlesung oder bei den folgenden Autoren:

- H. Yamada, Strength of Biological Materials, Robert E. Krieger Pub. Company, New York, 1973, ISBN 0-88275-119-0
- H. Abé, K. Hayashi, M. Sato (Eds.), Data Book on Mechanical Properties of Living Cells, Tissues, and Organs, Springer Verlag, Tokyo, 1996, ISBN 4-431-70175-3
- M. Nordin & V.H. Frankel, Basics Biomechanics of the Musculoskeletal System. Lea & Febiger, Philadelphia, 1989. ISBN 0-8121-1227-X

Der starre Körper stellt, wie bekannt, eine Abstraktion dar. In Wirklichkeit sind die Teile eines physikalischen festen Körpers, z.B. einer Eisenstange, nicht absolut fest miteinander verbunden, sondern sie erleiden unter dem Einfluss von Kräften kleine Verschiebungen gegeneinander - Deformationen -, die allerdings im Allgemeinen so klein sind, dass man sie bei vielen Vorgängen vernachlässigen kann. Dass zur Erzielung einer Deformation eines festen Körpers erhebliche Kräfte erforderlich sind, können wir auf Grund der Vorstellung vom Aufbau der Stoffe in vielen Fällen gut vorstellen. Ohne Einwirkung äusserer Kräfte befindet sich der feste Körper im Zustand inneren Gleichgewichts, in dem seine Grundbausteine, Atome und Moleküle, sich in solchen Abständen befinden, dass die zwischen ihnen wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind. Jede durch äussere Kräfte erzwungene Änderung dieses Abstandes bewirkt sofort ein Überwiegen der Anziehungs- oder der Abstosskräfte, deren Gesamtwirkung als innerer Druck oder Zug nun den äusseren Kräften das Gleichgewicht hält. Ein etwas grobes Bild können wir uns dadurch verschaffen, dass wir uns die Grundbausteine durch

Federn verbunden denken. Dieses Bild zeigt uns, wie eine an einem begrenzten Teil hervorgerufenen Deformation sich auf den ganzen Körper ausdehnen muss. Der Verzerrungstensor beschreibt die geometrisch-kinematischen Verhältnisse unendlich kleiner Deformationen um einen Punkt P_0 , der Spannungstensor die im inneren auftretenden Kräfte bezogen auf die Flächen eines sehr kleinen, infinitesimalen Volumenelementes. Beide Tensoren sind symmetrisch und weisen daher im Allgemeinen 6 unabhängige Komponenten auf. Die Beziehung zwischen diesen zwei Grössen charakterisiert das Material. Bei Annahme eines linearen Zusammenhangs wird im allgemeinsten Fall das Material durch 36 Konstanten beschrieben. Je nach Symmetrieeigenschaften des betrachteten Stoffes reduzieren sich diese Anzahl an Konstanten beträchtlich. Betrachten wir lediglich isotropen Stoffe (= Unabhängigkeit einer Eigenschaft von der Richtung), also keine Kristalle, so kommen wir sogar mit 2 Konstanten aus. Diese zwei Konstanten sind - im Rahmen des Hookschen Gesetzes, nach welchem die Normalspannung der auf die Längeneinheit bezogenen Verlängerung proportional ist - der (lineare) *Elastizitätsmodul* E und die *Poisson'sche Zahl* μ . Die *Poisson'sche Zahl* beschreibt das Verhältnis der Querkontraktion, d.h. der Längenänderung einer senkrecht zur Zugrichtung gelegenen Streck von Länge eins zur Längsdilatation. Die Beziehung zwischen Verzerrungstensor ϵ_{ij} und Spannungstensor σ_{ij} lautet für isotrope Stoffe:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \left(\sigma_{11} - \frac{\mu}{1+\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right), & \epsilon_{12} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \sigma_{12} \\ \epsilon_{22} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \left(\sigma_{22} - \frac{\mu}{1+\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right), & \epsilon_{23} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \sigma_{23} \\ \epsilon_{33} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \left(\sigma_{33} - \frac{\mu}{1+\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right), & \epsilon_{31} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \sigma_{31}\end{aligned}\quad (1.42)$$

Der Zusammenhang zwischen der Deformation eines Materials und der dazu notwendigen Kraft wird - wenn es nicht um Betrachtungen der inneren Kräfte geht - im einfachsten Fall durch die Grösse *Federkonstante* angegeben. Zwischen den Grössen Kraft F , Längenänderung Δl und Federkonstante k einerseits und den Grössen Spannung σ , Dehnung ϵ und Elastizitätsmodul E andererseits bestehen z.B. für einen zylinderförmigen Körper mit der Querschnittsfläche A , der in Längsrichtung belastet wird folgende Relationen:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.43)$$

oder:

$$k = E \cdot \frac{A}{l_0} \quad (1.44)$$

Wird eine reine Schubspannung an einem festen Quader angelegt (z.B. $\sigma_{12} = \tau \neq 0$, alle anderen $\sigma_{ij} = 0$, so *schert* der Körper um den Winkel $\gamma = \epsilon_{12}$. Das Verhältnis zwischen τ und γ wird als *Scherungsmodul* oder *Schubmodul* G bezeichnet. Diese Grösse ist aber keine neue unabhängige Materialkonstante, sie durch E und μ bereits bestimmt:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1.45)$$

Ebenso ist die Volumenkompressibilität κ durch E und μ bestimmt und ist gegeben, unter dem Einfluss eines allseitig gleichstarken Normaldrucks σ , durch:

$$\kappa = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{\sigma} = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \quad (1.46)$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass μ nicht grösser als 0.5 sein kann, da sonst der Körper unter Druck gesetzt mit einer Volumenzunahme antworten würde. Für $\mu = 0.5$ ist der Stoff inkompressibel.

Die obige Gleichung, welche die Relation zwischen Verzerrung und Spannung beschreibt, kann nach den Komponenten des Spannungstensors aufgelöst werden. Das Resultat lautet:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \left(\epsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right), & \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \epsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \left(\epsilon_{22} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right), & \sigma_{23} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \epsilon_{23} \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \left(\epsilon_{33} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right), & \sigma_{31} &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \epsilon_{31} \end{aligned} \quad (1.47)$$

1.9.1 Mechanische Eigenschaften der Materialien und Körper des passiven Bewegungsapparates

Um die mechanischen Eigenschaften von einzelnen Bändern, Sehnen, oder Knochen oder deren Materialien zu beschreiben, verwendet man Begriffen wie Bruchspannung, Bruchkraft, Bruchdehnung, Elastizitätsmodul etc. Im Folgenden werden Grössenordnungen für Bruchdehnung, Bruchspannung und das E-Modul verschiedener biologischer Materialien bei statischen Belastungen aufgelistet.

Knochen

Der kompakte Knochen (substantia compacta) kann Dehnungen bis ca. 2% aushalten. Wird diese Grenze überschritten, kommt es zum Bruch (Bruchdehnung). Der spongiöse Knochen (substantia spongiosa) kann bis zu ca. 75% gedehnt werden bevor er bricht (Nordin & Frankel S. 8). Die Festigkeit (= Bruchspannung) der Substantia compacta auf Druck bzw. Zug beträgt ca. 200 MPa bzw. 130 MPa (Nordin & Frankel S. 13). Der E-Modul auf Druck bzw. Zug variiert zwischen 10 und 25 GPa (Yamada, S. 21, 28).

Kraft und Deformation am Bruchpunkt für die intakten Röhrenknochen Femur und Tibia sind von der Grössenordnung (aus Yamada: 49/50, 59/60 und 69):

Belastung	Körper	Bruchkraft	Bruchdehnung
Druck	Femur, Tibia	25'000 N, 20'000 N	-, -
Biegung, ant.-post.	Femur, Tibia	2'500 N, 2'600 N	11 mm, 9.9 mm
Torsion	Femur, Tibia	140 NM, 100 Nm	1.5°, 3.4°

Gelenknorpel

Die charakteristischen Grössenordnungen für hyalinen Knorpel sind (Yamada, S. 81, 82):

Druckfestigkeit: $10 \text{ Nmm}^{-2} = 10 \text{ MPa}$,

Bruchstauchung: ca. 13%,

E-Modul: 5-10 MPa.

Bemerkung: Gelenknorpel zeigt ein elastisches Verhalten bis zu einer Spannung von ca. $5 \text{ Nmm}^{-2} = 5 \text{ MPa}$.

Band

Die charakteristischen Grössenordnungen für das Material Band sind (Abé et al, S. 193ff, S. 203, S. 206/7, S. 212):

Zugfestigkeit: $5 \text{ Nmm}^{-2} = 5 \text{ MPa}$,

Bruchdehnung: ca. 15-20 %,

einzelne Bänder bis zu 70 %

E-Modul für kleine Dehnungen: 70 MPa, E-Modul für grosse Dehnungen: 200 MPa.

Bemerkung: Bandmaterial zeigt ein starkes nicht lineares Verhalten.

Die Bruchkraft einzelner Bänder im oberen Sprunggelenk und im Kniegelenk ist von der Grössenordnung:

Gelenk	Band	Bruchkraft
Kniegelenk	Kreuzband	1500 N
Oberes Sprunggelenk	Lig. talofibulare anterius	140 N
Oberes Sprunggelenk	Lig. talofibulare posterius	260 N
Oberes Sprunggelenk	Lig. calcaneofibulare	350 N
Oberes Sprunggelenk	Lig. deltoideum (tibiotolare)	710 N

Sehne

Die Grössenordnungen für das Material Sehne sind (Yamada S. 99, Abé et al, S. 193 ff, S. 197, S. 223, S. 224, S. 238, S. 244/245/246):

Zugfestigkeit: $50 \text{ Nmm}^{-2} = 50 \text{ MPa}$

Bruchdehnung: ca. 10 %

E-Modul: 300 - 1000 MPa

1.9.2 Spezielle Materialeigenschaften

Knochen - Band – Übergang

Knochen- und Bandmaterial zeigen ein unterschiedlich starkes visko-elastisches Verhalten. Daher ist in einem System Knochen-Band der Bruchort von der Dehnungsgeschwindigkeit abhängig. In Frankel Nordin (S. 68) findet man dazu folgenden Kommentaer:

More complex viscoelastic behavior is observed in the entire bone-ligament-bone complex. Anterior cruciate ligaments in knee specimens taken from 30 primates were tested in tension to failure at a slow and a fast loading rate. At the slow loading rate (60 seconds), much slower than that of an injury mechanism in vivo, the bony insertion of the ligament was the weakest component of the bone-ligament-bone complex, and a tibial spine avulsion was produced. At the fast loading rate (0.6 seconds), which simulated an injury mechanism in vivo, the ligament was the weakest component in two thirds of the specimens tested.

Ermüdung von Materialien

Auch für biologisches Material gilt die Wöhler-Kurve. Dazu kommt noch die Eigenschaft eines lebenden Materials (Abé et al, S. 255, S. 258, S. 322, S. 332/3/4).

Einfluss des Alters

Grob gesagt gilt für ausgewachsene Lebewesen: Je älter, desto schwächer (Abé et al, S. 301, S. 311, S. 322, S. 332/3/4).

Zusammenhang Elastizitätsmodul und Bruchspannung beim Knochen

Der Zusammenhang ist linear. Vorsicht ist angebracht bei sehr unterschiedlichen Altersgruppen (Abé et al, S. 317).

1.10 Aufgaben

1. Zwangskräfte, Leiter an der Wand

Gegeben: Eine Leiter der Länge l und der Masse m steht mit dem Neigungswinkel α an der Wand und wird von einem Mann mit Masse M bis zur Länge L bestiegen ($L < l$). Die Leiter hat an beiden Enden Rollen, so dass keinen Reibung gegen Wand und Boden auftritt. An ihrem unteren Ende ist ein Seil parallel zum Boden befestigt, um das Wegrutschen zu verhindern.

Gesucht: Wie gross ist die Kraft F des Seiles?

2. Die Kraftmessplatte als starrer Körper / Einwirkende Kräfte - gemessene Kräfte

Kräfte, die der Mensch beim Gehen, Laufen und Springen als Reaktionskräfte am Boden erzeugt, werden im Allgemeinen mit sogenannten Kraftmessplatten (= KMP) gemessen. Der Aufbau ist einfach. Eine möglichst starre Platte bildet die Messfläche. An der Unterseite der Platte sind in jeder Ecke Piezo-Kraft-Sensoren befestigt, die die Kraft zwischen der Platte und dem Boden messen. Mehr über das Messprinzip und die Dimensionen der Platte findet man in der Vorlesung von H. Gerber.

Gegeben: Zwei Kräfte, \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

Bem. und vereinfachende Annahmen:

- Senkrecht zur Messfläche kann nur eine „Druck-Kraft“ erzeugt werden.
- Die Platte ist nicht deformierbar.
- Die Sensoren haben die Koordinaten (Ursprung Plattenmitte / Oberseite): S1 = $(+a, +b, -d)$, S2 = $(-a, +b, -d)$, S3 = $(+a, -b, -d)$, S4 = $(-a, -b, -d)$. (3) Sensor 4 weglassen, damit das Problem in z -Richtung statisch definiert ist.

Gesucht: (1) Wieviele Sensoren in x und y -Richtung dürfen höchstens eine Kraft messen d.h. verbinden KMP und Boden, damit das Problem auch in der Ebene statisch definiert ist. (2) Die Kräfte, die an den Sensoren gemessen werden.

3. Der freie, gedämpfte harmonische Oszillator

Gegeben: Die Bewegungsgleichung des freien, gedämpften harmonischen Oszillators.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Gesucht: Die Bewegung.

4. Erzwungene Schwingungen des gedämpften Oszillators

Gegeben: Die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cdot \sin(\Omega t)$$

Gesucht: Die Bewegung.

5. Zwei gekoppelte Oszillatoren

Gegeben: Zwei identische harmonische Oszillatoren, die durch eine Feder k_{12} verbunden sind und sich nur auf einer horizontalen Geraden bewegen können.

Gesucht: (1) Die Bewegungsgleichung. (2) Berechne die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung, falls die Oszillatoren ungedämpft sind.

6. Das physikalische Pendel als eindimensionale Bewegung

Gegeben: Masse m , Federkonstante k

Gesucht: Die Bewegungsgleichung (a) nach Newton und (b) nach Lagrange.

7. Der Aufprall eines Massenpunktes auf eine deformierbare Unterlage

Gegeben: Masse m , Federkonstante k , die die Härte der Unterlage approximativ beschreibt.

Gesucht: Die Bewegungsgleichung (a) für den vertikalen Aufprall und (b) für den schiefen Aufprall unter Vernachlässigung der Gleitreibungskraft.

8. Das mathematische Pendel

Gegeben: Masse m und masseloser Stange, Länge der Stange l_0

Gesucht: Die Bewegungsgleichung (a) Nach Newton mit dem Prinzip von d'Alembert und (b) nach Lagrange.

9. Das mathematisch-physikalische Pendel

Gegeben: Masse m , Ruhelänge der Feder l_0 , Federkonstante k .

Gesucht: Die Bewegungsgleichung (a) nach Newton und (b) nach Lagrange.

10. Schwingungsfrequenz eines starren Körpers mit fester Drehachse.

Gegeben: Ein an einem idealen Lager aufgehängter starrer Körper mit folgenden Dimensionen: Distanz: $l = \text{Achse} - \text{KSP} = 0.19 \text{ m}$, Masse $m = 3.25 \text{ kg}$ und $I = \text{Trägheitsmoment} = 0.06 \text{ kgm}^2$.

Gesucht: (a) Die Bewegungsgleichung. (b) Eine analytische Lösung für kleine Ausschläge. (c) Die Frequenz der Schwingung.

11. Aufprall eines starren Körpers auf eine ideale Feder

(siehe Abbildung 1.24).

Gegeben: Dünner, homogener Stab als starrer Körper mit folgenden Dimensionen: Länge l , Masse m und Trägheitsmoment I . Boden bzw. Unterlage als ideale Feder mit der Federkonstante k . Die Reibung zwischen Stab und Boden wird vernachlässigt.

Gesucht: (a) Die Bewegungsgleichung (b) Eine analytische Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung.

Hinweise: (1) „Fusspunkt“ als neue Variable wählen. (2) Differentialgleichung linearisieren. (3) Linearisierte Differentialgleichung lösen.

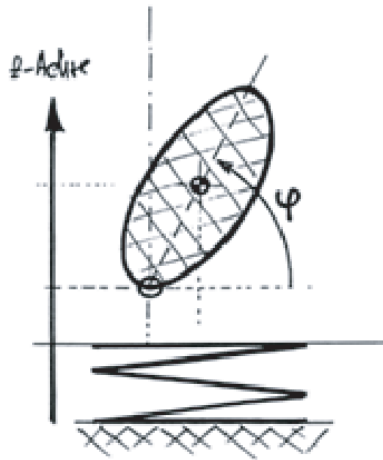


Abbildung 1.24: Schematische Darstellung der Aufprallsituation.

12. Das physikalische und mathematische Doppelpendel

(siehe Abbildung 1.25)

Gegeben: Ein physikalisches Doppelpendel (Massen: m_1 und m_2 , Federkonstanten k_1 und k_2) bzw. ein mathematisches Doppelpendel (Massen: m_1 und m_2 , Längen: l_1 , l_2).

Gesucht: (a) Die Lagrangefunktion, (b) die Bewegungsgleichung.

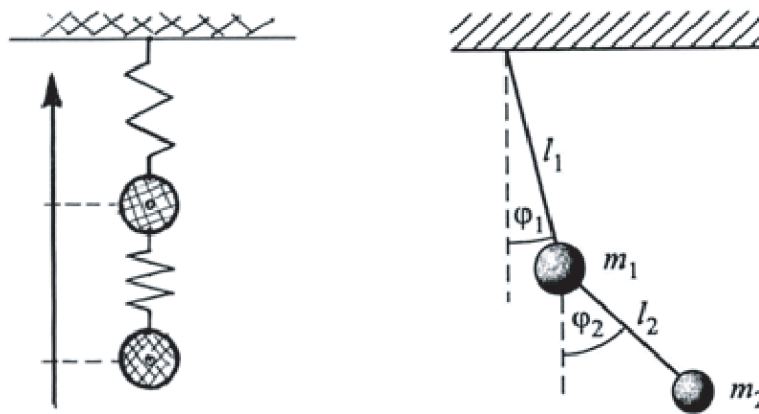


Abbildung 1.25: Das physikalische und mathematische Doppelpendel.

13. Das dynamische Verhalten einer zweigliedrigen Kette mit festem Lager

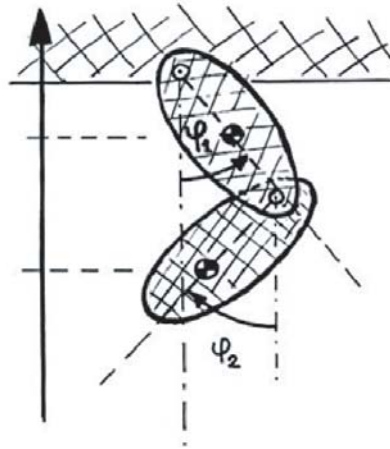


Abbildung 1.26: : Schematische Darstellung von zwei starren Körpern als Doppelpendel mit fester fester Achse.

(siehe Abbildung 1.26).

Gegeben: Eine an einem idealen Lager aufgehängte zweigliedrige kinematische Kette. Die zweigliedrige Kette stellt Ober- und Unterschenkel dar. Folgende Längen, Massen und Trägheitsmomente sind gegeben:

Oberschenkel: Länge = 0.44 m, Masse = 7.0 kg, Trägheitsmoment um den KSP = 0.16 kgm² und die Distanz *Achse Aufhängung - KSP Oberschenkel* = 0.19 m,

Unterschenkel: Länge = 0.44 m, Masse = 3.25 kg, Trägheitsmoment um den KSP = 0.06 kgm² und die Distanz *Achse Kniegelenk - KSP Unterschenkel* = 0.19 m.

Gesucht: (a) Die Bewegungsgleichung. (b) Eine analytische Lösung für kleine Ausschläge. (c) Die Schwingungsfrequenzen des Systems (freiwillig).

14. Die effektive Masse m^*

Gegeben: Dünner, homogener Stab als starrer Körper mit folgenden Dimensionen: Länge l , Masse m und Trägheitsmoment I . Boden bzw. Unterlage als ideale Feder mit der Federkonstante k . Die Reibung zwischen Stab und Boden wird vernachlässigt.

Gesucht: Die effektive Masse $m^*(\phi_0)$, d.h. stellen Sie die effektive Masse als Funktion des Aufprallwinkels ϕ_0 dar unter Verwendung der unten angegebenen Annahme und schätzen Sie grob den Fehler ab, der dabei entsteht.

Annahme: $\phi(t) \approx \phi(0)$, $\dot{\phi}(t) \approx 0 \text{ s}^{-1}$. (c)

15. Das muskuläre Rückstellmoment am Kniegelenk

Gegeben: Ein an einem idealen Lager aufgehängter starrer Körper stellt den Unterschenkel dar, das Lager das Kniegelenk. Der US wird durch

ein Muskelpaar, beschrieben durch eine Spiral-Feder und einen Dämpfer stabilisiert.

Das System ist durch folgende Zahlen charakterisiert:

Distanz Achse-KSP = 0.19 m, Masse = 3.25 kg, Trägheitsmoment = 0.06 kgm², Federkonstante = 100 Nm⁻¹, Dämpfungskonstante = 2 Nsm².

Gesucht: (a) Das Rückstellmoment, falls der Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ aus seiner Gleichgewichtslage gedrängt wird. (b) Die Bewegungsgleichung. (c) Eine analytische Lösung für kleine Ausschläge. (d) Das Schwingungsverhalten des Unterschenkels.

16. Pedalkräfte beim Velofahren

(siehe Abbildung 1.27).

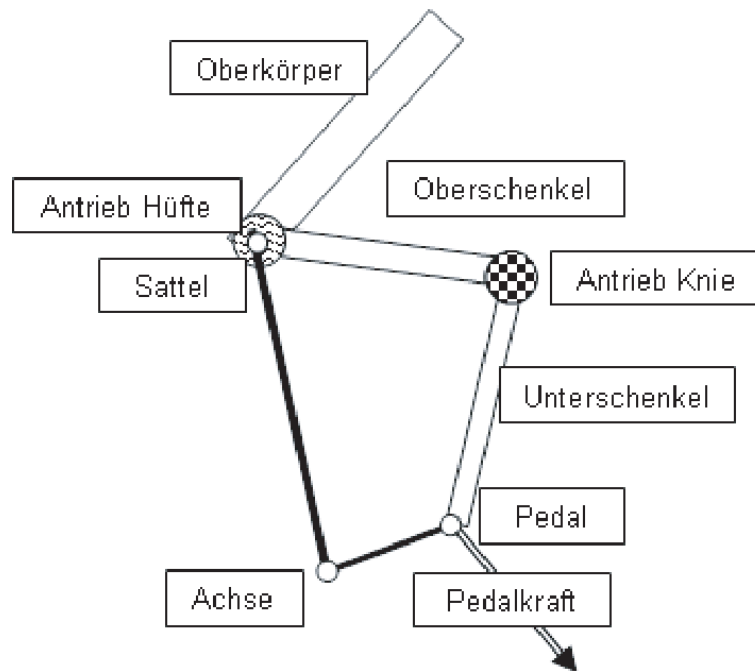


Abbildung 1.27: Schematische Darstellung der Pedalkräfte beim Fahrradfahren. Achtung: Die Skizze ist nicht im richtigen Massstab gezeichnet; Die Kurbel ist z.B. zu lang im Vergleich zum Unterschenkel.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Pedalkräfte bei gegebenem Antriebsdrehmoment im Knie- und Hüftgelenk zu bestimmen. Dazu wird der Fahrer als dreigliedrige kinematische Kette mit idealen Scharniergelenken angenommen; die Kette stellt den Oberkörper, den Oberschenkel und den Unterschenkel dar. Der Fuss wird vernachlässigt. Diese Idealisierung ist im unten stehenden Bild dargestellt. Die Hüftstrecker und -beuger sowie die Kniestrecker- und beuger, die Antriebsmotoren des Velofahrers, sind durch Drehmoments-Relationen in Abhängigkeit vom Winkel und von der Winkelgeschwindigkeit gegeben. Die allgemeine Form sei:

$$M_{Knie} = f(\varphi_{Knie}, \dot{\varphi}_{Knie}) \quad (1.48)$$

bzw.

$$M_{Huefte} = f(\varphi_{Huefte}, \dot{\varphi}_{Huefte}) \quad (1.49)$$

Gegeben: Kurbelachse = Koordinatenursprung. Die Koordinaten vom Sattel: $d = -0.1$ m, $h = 0.95$ m (Bem.: Sattel = Achse des Hüftgelenkes), $l_{US} =$ Länge des Unterschenkels = 0.6 m, $l_{OS} =$ Länge des Oberschenkels = 0.6 m, $l_{KU} =$ Länge der Kurbel = 0.17 m, Oberkörper ist fixiert.

Gesucht: Kraft auf Pedale in den Positionen „oben“, „vorne“, „unten“ und „hinten“ unter folgenden vereinfachten Annahmen: (1) Quasistatisch + ohne Schwerkraft. (2) Drehmomente in Knie- und Hüftachse seien konstant mit folgenden Werten: Drehmoment auf Unterschenkel um Knieachse = -50 Nm, Drehmoment auf Oberschenkel um Hüftachse = 30 Nm.

17. Der Aufprall einer zweigliedrigen Kette als planare Bewegung

Gegeben: Die Massen m_1 und m_2 , die Trägheitsmomente I_1 und I_2 , die proximalen und distalen Längen der zwei Körper a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 und die Federkonstante k .

Gesucht: Die Bewegungsgleichung.